Théorème de Weierstrass

Ref : Zuily-Queffélec, (lemme p 42 Demailly ANU et ED).

Thm : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Soit $\omega : h \mapsto \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leq h\}$ son module de continuité uniforme.

Posons pour $n \geq 1$: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$

- (B_n) cvu sur $[0,1]$ vers f et $\exists C \geq 0\ \forall n\ \|f-B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- Cette majoration est optimale : $\exists f\ \exists \delta > 0\ \forall n\ \|f-B_n\|_\infty \geq \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Lemme : Soit $h \in (0,1]$, $\lambda > 0$ tq $h\lambda \in (0,1]$ $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$.

Démonstration du théorème : ① CVU :

tq $B_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,x)$ pour (X_k) iid $\sim b(x)$.

On a alors :

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \overset{IT}{\leq} \mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right)$$

$\lambda = \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|$, $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\underset{\text{Lem}}{\leq} \mathbb{E}\left(\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1 + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underset{\text{Holder}}{\leq} \left(\sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2 + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Or $\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 \underset{\text{centré}}{=} \mathrm{Var}\left(x - \frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$

$$\leq \left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4n}} + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $B_n \xrightarrow{cvu} f$

② Majoration Optimale :

Prenons $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ alors $\omega(h) \leq h$ car $\left|\left|x-\frac{1}{2}\right| - \left|y-\frac{1}{2}\right|\right| \leq |x-y|$.

(X_n) iid $\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - B_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = B_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n}\mathbb{E}|2S_n - n|$$

$$= \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right|$$

avec $\varepsilon_k = 2X_k - 1$ Rademacher iid.

Posons $Y = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)$, $|Y| = \prod_{k=1}^{n} \left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right| = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\left(1+\frac{\varepsilon_k^2}{n}\right)^{\frac12}}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac12}}$

$\le \prod_{k=1}^{n} \left(e^{\frac1n}\right)^{\frac12} = \sqrt{e}$.

Et $\mathbb{E}(\varepsilon_k Y) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}\left(\varepsilon_k\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\right) \prod_{j\neq k} \mathbb{E}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right) = \frac{i}{\sqrt{n}} \times 1$

donc $\left|\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k Y\right)\right| = |i\sqrt{n}| = \sqrt{n}$.

Donc $\sqrt{n} = \left|\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k Y\right)\right| \le \mathbb{E}\left(|Y|\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right|\right) \le \sqrt{e}\, \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\right| \le \sqrt{e}\, 2n \|f-B_n\|_\infty$

Ainsi, $\|f-B_n\|_\infty \ge \frac{1}{2\sqrt{e}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{2\sqrt{e}}\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. □

Démonstration du lemme :

Mq ω est sous additive.

Déjà, ω est croissante et tend vers 0 en 0 car continue sur un compact $\Rightarrow$ UC.

Soit $x, y \in [a,b]$ tq $|x-y| \le t_1+t_2 \Rightarrow \exists z \in [x,y]$ tq $\begin{cases} |x-z| \le t_1 \\ |z-y| \le t_2 \end{cases}$

d'où $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)|$

$\le \omega(|x-z|) + \omega(|z-y|) \le \omega(t_1) + \omega(t_2)$.

Puis en prenant le sup sur x et y : $\omega(t_1+t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_2)$.

En itérant : $\omega(nt) \le n\,\omega(t)$ puis pour $\lambda > 0$ on a :

$\omega(\lambda t) \le \omega((\lfloor \lambda \rfloor + 1)t) \le (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\,\omega(t) \le (\lambda+1)\,\omega(t)$. □