Nombre de zéros d'une EDO :

Leçons :

Ref : Zuily - Queffélec p405

Théorème : On considère (E) : $y'' + qy = 0$. On suppose $q \in C^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$, $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(t)}\,dt = +\infty$ et $q'(t) \underset{+\infty}{=} o(q^{3/2}(t))$. Pour $y \not\equiv 0$, on a :

$$N(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du \quad \text{où } N(x) = \#\{u \in [a,x],\ y(u) = 0\}$$

Lm : Soient $y_1, y_2 \in C^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ sans zéro commun. Alors si $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ (wronskien) et $y_1(a) + i y_2(a) = R_0 e^{i\theta_0}$, il existe $R, \theta \in C^1([a,+\infty[, \mathbb{R})$ tq $y_1 = R\cos\theta$, $y_2 = R\sin\theta$ où $R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\forall x\ \theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{W(t)}{R(t)^2}\,dt$.

Dem du Lm : Posons $\varphi = y_1 + i y_2$. Par hypo, φ ne s'annule pas.

Donc $\psi : x \mapsto \int_a^x \frac{\varphi'}{\varphi} + \ln R_0 + i\theta_0 \in C^1([a,+\infty[)$. $[\psi = \ln \varphi]$

De plus, $(\varphi e^{-\psi})' = \varphi' e^{-\psi} + \varphi \times (-\psi') e^{-\psi} = e^{-\psi}\left(\varphi' - \varphi \times \frac{\varphi'}{\varphi}\right) = 0$.

donc $\varphi(x) e^{-\psi(x)} = \varphi(a) e^{-\psi(a)} = \varphi(a) e^{-(\ln R_0 + i\theta_0)}$

d'où $\varphi(x) = e^{\psi(x) - \ln R_0 - i\theta_0} \varphi(a) = e^{\psi(x)}$ (hypo sur $\varphi(a)$).

Ainsi, $\varphi(x) = R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(\int_a^x \frac{\varphi'}{\varphi}\right) = R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(\int_a^x \frac{(y_1' + i y_2')(y_1 - i y_2)}{R^2(t)}\right)$

$= R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{W}{R^2} + \int_a^x \underbrace{\frac{y_1' y_1 + y_2' y_2}{R^2}}_{= \frac{1}{2} \times \frac{(R^2)'}{R^2}}\right) = R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{W}{R^2} + \frac{1}{2} \ln(R^2)\Big|_a^x\right)$

$= R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{W}{R^2} + \ln R(x) - \ln R(a)\right) = \frac{R(x)}{R(a)} R_0 e^{i\theta_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{W}{R^2}\right) \underset{R(a) = R_0}{=} R(x) e^{i\theta_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{W}{R^2}\right)$

donc $\varphi(x) = R(x) e^{i\theta(x)}$ avec $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{W(t)}{R^2(t)}\,dt$. □

Dem du thm : (1) CVAR :

Posons $T(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du \in C^1$ et $\forall x \geq a$ $T'(x) = \sqrt{q(x)} > 0$ et $T \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Donc T est une bij de classe C^1 : $[a,+\infty[\to [0,+\infty[$. On pose $Y = y \circ T^{-1}$ ie $Y \circ T = y$.

$\forall x > 0$ $y' = Y'(T) \times T' = Y'(T)\sqrt{q}$;

$y'' = Y'(T) \times \frac{1}{2} \frac{q'}{\sqrt{q}} + Y''(T) \times T' \sqrt{q} = Y'(T) \times \frac{q'}{2\sqrt{q}} + q Y''(T)$

Soit $0 = y'' + qy = Y'(T) \times \frac{q'}{2\sqrt{q}} + q Y''(T) + q Y(T)$ $\quad \downarrow \times q^{-1}$ (car $q \neq 0$)

$Y''(T) + Y'(T)\frac{q'}{2q^{3/2}} + Y(T) = 0$. $\forall t \geq 0$ on pose $\varphi(t) = \frac{q'(T^{-1}(t))}{2q^{3/2}(T^{-1}(t))}$

tq $Y'' + \varphi Y' + Y = 0$.

(2) <u>Utilisation du Lm</u> : Y et Y' n'ont pas de zéro commun sinon $\begin{cases} Y'' + \varphi Y' + Y = 0 \\ Y(t_0) = Y'(t_0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Cauchy-Lipschitz $Y = 0$ seule sol par unicité.

Donc $Y = R\sin\theta$, $Y' = R\cos\theta$: $Y' = R'\sin\theta + R\theta'\cos\theta = R\cos\theta$. $(*)$
$(= (R\sin\theta)')$

et $Y'' = -\varphi Y' - Y = -\varphi R\cos\theta - R\sin\theta = (Y')' = (R\cos\theta)' = R'\cos\theta - R\theta'\sin\theta$ $(**)$

Soit : $(*) \times \cos\theta + (**) \times (-\sin\theta)$:

$R\cos^2\theta + R\sin^2\theta + \varphi R\cos\theta\sin\theta = R'\sin\theta\cos\theta + R\theta'\cos^2\theta - R'\sin\theta\cos\theta + R\theta'\sin^2\theta$

Soit $R + \varphi R\cos\theta\sin\theta = R\theta'$ soit $\theta' = 1 + \varphi\cos\theta\sin\theta$

$|\theta' - 1| = |\varphi\cos\theta\sin\theta| = |\varphi \frac{\sin(2\theta)}{2}| \leq \frac{1}{2}|\varphi(t)| \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $\theta'(t) \to 1$
donc par intégration des $\sim$: $\theta(t) \sim t$

(3) <u>Etude asymptotique des zéros</u> :

Notons $M(t)$ = le nb de 0 de Y sur $[0, t]$. Mq $M(t) \underset{+\infty}{\sim} t/\pi$.

Mq $M(t) < +\infty$ $\forall t$. Par l'absurde, si $\exists t_0$ tq $M(t_0) = \infty$ alors l'ens de 0 de Y dans $[a, t_0]$ aurait un pt d'accumulation u. de sorte que $\exists (u_n)$ suite de 0 de Y tq $u_n \to u$.

Alors $0 = \frac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} \to Y'(u)$ ce qui contredit l'absence de 0 commun entre Y et Y'.

Donc $\forall t$ $M(t) < +\infty$. Fixons $t_0 \geq 0$ tq $\theta'(t) > 0$ sur $[t_0, +\infty[$.

Alors $M(t) \sim \#\{u \in [t_0, t],\ \sin\theta(u) = 0\}$ (car $\#\{u \in [0, t_0], \sin\theta(u) = 0\} < +\infty$ et $M(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$)

$\underset{\theta \text{ C}^1\text{ difféo}}{\sim} \#\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)],\ \sin v = 0\} \sim \#\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\}$

$= \left\lfloor \frac{\theta(t)}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\theta(t_0)}{\pi} \right\rfloor \sim \frac{\theta(t)}{\pi} \sim t/\pi$.

Puisque $N(x) = M(T(x))$ on a :

$N(x) \sim \frac{T(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$. $\square$

<u>Rq</u> : Si $q' = o(q^{3/2})$ n'est pas vérifié, le résultat est faux. Par ex, si $q(x) = \frac{1}{4x^2}$ alors $q' = \frac{-1}{2x^3}$ et $y'' + \frac{1}{4x^2}y$ a pour sol $\sqrt{x}(a + b\ln x)$ car $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}\ln x$ sont sols et s'annule au + 1 fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{\pi}\int_1^x \frac{du}{2u} = \frac{\ln x}{2\pi}$. Absurde $\square$.

<u>Ex</u> : $q = 1$, $y'' + y = 0 \Rightarrow y = a\cos(x) + b\sin(x)$, $\int_0^{+\infty}\sqrt{1} = +\infty$ $q' = 0 = o(q^{3/2})$

$N(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^x 1 = x/\pi$. $\square$