

102: Groupe des nombres complexes de module 1

Racines de l'unité: Applications

Inter: Utile en algèbre et géométrie (forme polaire de \mathbb{C} , notation, racine de l'unité) et analyse (Fourier)

I) Nombres complexes de module 1.

a) Le groupe U [CAF]

- def: noyau du morphisme $z \mapsto |z|$; $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
- def $z^k = z \dots z$ et $x \in \mathbb{R} \rightarrow z^{ix} \in U$ homomorphisme; def de \mathbb{T}

- ex: $U = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; U compact avec de \mathbb{C} . U non ordonnable
- ex: $f: U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alors \exists un θ $f(\theta) = (1, 0)$ [Impr]

b) Applications trigonométriques. [CAF]

- def \cos, \sin : finale de Noire; finale d'Euler ex on notent que \cos est à valeur dans U . ex: $e^{i\pi} = -1$

ex: linéarisation de $\cos(x)^n$; $T(x)$ de Tchebychev; calcul du noyau de Fejér et Dirichlet; calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha)$

c) Paramétrisation sur le cercle unité [Cenles]

- IR paramétrisation de U par $t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \in U \setminus \{-1, 0\}$
- ex: \mathbb{R} mélange à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en associant $\{-1, 0\}$ au $+\infty$.
- ex: se mélangent avec des réels
- ex: Réécriture $X^2 + Y^2 = Z^2$; $\mathbb{Q}^n \setminus U$

d) Noyau d'un angle orienté [CAF]

- $\mathbb{R} \ni !$ notation f_θ v envoyé sur v ($v, 0 \in U$) + ex pour en dim 3. $!$ def angle orienté + relat. d'équivalence
- $q \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R} \mapsto n \in SO(\mathbb{R}^2)$ Rotation; charles angles qu'il de

II) Cyclotôme

a) Racine de l'unité [AF]

- def μ_n : μ_n est cyclique; racine primitive ex
- μ_n est le seul n -gène fini de \mathbb{H}_n de \mathbb{C} .
- \sum des racines n-ème fait 0; ex calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\zeta_k}$ [Impr]

$f_{SE}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k$ alors $\int_0^{2\pi} f_{SE}(e^{-it}) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikt} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt$ [Impr]

- Représentation de μ_n dans \mathbb{C} [en μ_n un pentagone]

b) Polynômes cyclotomiques [Cenles]

- def, q, q propr. (irréductible, deg, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$)

DEV: IR de Kronecker

- IR de Dirichlet faible ex: $\Phi_p \Phi_n \dots \Phi_n$ est matriciel

III) Applications avec matrices

a) Résultats matriciels [Impr]

- Spectre de matrice à ordre fini ex: U de Burnside
- DEV: matrice circulante et auto de polygone

b) Transformée de Fourier discrète

- def et un exemple (avec la matrice de Vandermonde)
- lien avec la transformée de Fourier et les matrices circulantes [Cenles]