149 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Motivation: Trouver et étudier les éléments propres à pour but de simplifier les problèmes et les études. En effet, il s'agit de trouver et d'étudier des axes privilégiés selon lequels une application se comporte comme une dilatation.

On pourrait parler d'éléments propres pour des opérateurs en général mais on va se limiter au cadre de la dimension finie (car c'est le cadre le plus utilisé en pratique) et donc identfier les endomorphismes à des matrices[1].

I Généralités et calculs exactes.

Définition et premières propriétés

Def Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces caractéristiques [Rom19a] (chap 1) ou [Gou04a].

Ex Matrice de rotation (du plan) qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$ + ses sous-espaces caractéristiques (+rq cet exemple met en lumière l'importance du corps considéré).

Calculs exacts

Def Polynôme caractéristique [Gou04a] (+rq disant que c'est "bien défini" pour les endomorphismes (ne pas oublier que ça reste les objets d'étude de cette leçon)).

Prop Les racines du polynômes caractéristiques sont les valeurs propres de la matrice [Gou04a]

Def D'une matrice diagonalisable [Gou04a]

Ex Donner une symétrie dans le plan réel[2].

(Rq) La matrice de changement de base (d'une matrice diagonalisable) permet d'obtenir des vecteurs propres.

Thme Théorème spectral [Gou04a]

App Les matrices A^*A sont diagonalisables à valeur propres réelles (appelé valeurs singulières de A et c'est utile pour le rayon spectral).

Ex Donner une matrice 2x2 symétrique réelle et faire un dessin sur comment elle agit sur le plan pour faire le lien avec l'introduction.

Exemples de calculs

Ex Matrice circulante [IP19].

DEV Suite de polygone [IP19].

Ex Matrice d'ordre fini [IP19].

App Théorème de Burnside [IP19].

II Normes de matrices

rayon spectral

Def Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle [Rom19a] (chap 3.1).

Ex Cas particulier pour la norme 2 et infinie [Rom19a] (chap 3.1).

Thme Les propriétés des normes subordonnées [Rom19a] (chap 3.1) + les remarques en fin de chapitre.

App L'exponentielle matricielle est bien définie.

Def Du rayon spectral [Rom19a] (chap 3.4).

Ex Expression dans le cas de la norme 2 [Rom19a] (chap 3.4).

Lem On a $\rho(A) \leq |||A|||$ quelque soit la norme subordonnée [Rom19a] (chap 3.4). + rq cela donne un interval où l'on peut rechercher les valeurs propres.

Def Explication du principe de la méthode itérative pour un système linéaire (principe + définition de la suite pour introduire le DEV). [Rom19a] (chap 5.11).

Lem Pour tout ε il existe une norme subordonnée telle que $|||A||| \leq \varepsilon + \rho(A)$. [Rom19a] (chap 3.4).

DEV Méthode itérative pour la résolution d'un système linéaire [IP19].

[1] On va étudier seulement les matrices mais savoir motiver ce choix si le jury demande.

[2] Attention le jury peut alors demander si c'est vrai pour tout corps et la réponse et non, il y a juste un problème en caractéristique 2.

Conditionnement

Prop Sur la majoration de l'erreur sur un système [Rom19a] (chap 3.5).

Def Définition du conditionnement selon une norme [Rom19a] (chap 3.5).

Prop Exemples des propriétés du conditionnement [Rom19a] (chap 3.5).

Ex Expression du conditionnement pour la norme 2 + un exemple numérique + cas des matrices normales [Rom19a] (chap 3.5).

App Matrice de Hilbert + rq sur son rayon spectral et dire qu'on les utilise dans la vie courante [IP19].

III Calculs approchés

Localisation

Prop Disques de Gerschgörin-Hadamard [Rom19a] (chap 1.2). (+rq disant qu'il y au moins une valeur propre dans chacune des composantes connexes de l'ensemble des disques fermés[3])

(Prop) Amélioration avec le théorème D'Ostrowski (il faut introduire des notations et je n'ai pas d'application). [Rom19a] (chap 1.2).

App Localiser le spectre d'une matrice stochastique [Rom19a] (page 142 et point 5 page 126).

Lem Formule de Kronecker (analyse complexe) [BMP05] (démo dans [QQ17] ou [Rud20]).

Thme Théorème de Rouche [BMP05] (démo dans [QQ17] ou [Rud20]).

Ex Donner l'exemple dans le [BMP05] pour le nombre de racines d'un polynôme.

Méthodes itératives

Prop Méthode de la puissance itérée [Rom19a] (chap 6).

Rq Méthode de la puissance inverse [Rom19a] (page 212).

(Prop) Méthode QR [Cia06].

Prop Méthode de Givens-Householder (surtout le lemme 6.9) [Rom19a] (chap 6).

IV Remarques

- On peut rajouter du cours d'option sur la localisation des racines d'un polynôme si besoin.
- Dans la partie I on peut être rapide et ne pas parler du polynome minimal, des conditions pour être diagonalisable etc... Si besoin le jury demandera. Il faut donc être à l'aise dessus.
- Attention, l'exemple avec la matrice stochastique ouvre la porte à des théorèmes/théories plus compliquées (qui pourraient être un partie du plan sur les matrices strictement positives). On peut être rapidement amené à parler du théorème de Perron-Frobenius et de ses conséquences pour trouver des vecteurs propres, résultats sur l'unicité etc... Regarder [Rom19a] (chap 4.2 à 4.5) pour être (vraiment) au top sur le thème.
- S'il y a du temps, pour ne pas finir sur une proposition, essayer de faire un exemple pour la méthode de la puissance itérée ou de Givens-Householder.

[3] Se démontre avec de l'analyse complexe et théorème des résidus, pas de référence mais sympas à savoir.