203

Utilisation de la notion de compacité.

I. Notion de compacité

1) Compacité dans les espaces topologiques

Def 1 : Un espace topologique (X,τ) est dit séparé si pour tout $x,y \in X$ avec $x \neq y$, on peut trouver $U,V \in \tau$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et $x \in U$, $y \in V$.

Dans ce qui suit, les espaces considérés sont séparés.

Def 2 : Un espace topologique (X,τ) est dit compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Une partie A de X est dite compacte si le sous-espace topologique A est compact pour la topologie induite par celle de X.

Ex 3 : $\mathbb{R}$ n'est pas compact car on ne peut pas extraire de sous recouvrement fini de $\bigcup_{n\geq 0}^{+\infty}]-n,n[\supseteq \mathbb{R}$. En revanche les segments le sont.

Rq 4 : La séparabilité est importante. Par exemple $\mathbb{N}$ muni de la topologie cofinie vérifie la propriété de Borel-Lebesgue mais n'est pas séparé donc pas compact.

Dans ce qui suit on note X pour (X,τ).

Prop 5 : Il y a équivalence entre :
1) X est compact.
2) Si $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ avec I quelconque et $\forall i, F_i$ fermé, alors il existe $J \subset I$ finie telle que $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

En outre, si X est compact et $\forall J \subset I$ finie, $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ alors $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Rq 6 : On peut en déduire que si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans X compact, alors leur intersection est encore non vide.

Prop 7 : Une partie A de X compact est compacte si et seulement si elle est fermée.

Prop 8 : Une intersection quelconque de compacts est compacte. Une union finie aussi.

C-Ex 9 : Une union quelconque de compacts n'est pas compacte en général : $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 0}^{+\infty} [-n,n]$

Th 10 : (Tychonoff) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles topologiques non vides. Alors le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est compact si et seulement si chaque X_i est compact.

Rq 11 : Le cas où le produit est fini peut se traiter par récurrence mais sinon il faut l'axiome du choix.

App 12 : L'ensemble triadique de Cantor est compact.

2) Compacité dans les espaces métriques

Sauf mention explicite, (E,d) désigne un espace métrique.

Th 13 : (Bolzano-Weierstrass) L'ensemble E est compact si et seulement si de toute suite à valeurs dans E on peut extraire une sous-suite convergeant dans E.

Prop 14 : (Principe d'extraction diagonale) Soient $(X_p,d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des métriques et pour tout p, $(x_{n,p})_{n\geq 0} \in X_p^{\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout p, $\{x_{n,p}, n\in\mathbb{N}\}$ est d'adhérence compacte.

Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice telle que pour tout $p\in\mathbb{N}$ la suite $(x_{\varphi(n),p})_{n\geq 0}$ converge dans X_p.

Prop 15 : Si E est compact, alors il est borné. De plus, une partie compacte de E est fermée bornée.

Th 16 : (1er théorème de Dini) Soit $(f_n : E \to \mathbb{R})_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions continues (i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall x$) qui converge vers f continue. Alors la convergence est uniforme.

App 17 : La suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$ converge uniformément vers $\sqrt{\cdot}$.

Th 18 : Soient (E,d) un métrique compact et $(u_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d(u_{n+1},u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors l'ensemble Γ de ses valeurs d'adhérence est un connexe compact de E.

App 19 : (Lemme de la grenouille) Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue et $(u_n)_{n\geq 0}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in[0,1]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$. Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $u_{n+1}-u_n\to 0$. En outre, les valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\geq 0}$ sont des points fixes de f.

DEV 1

3) Cas particulier des espaces vectoriels normés

Th 20 : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

Coro 21 : En dimension finie les compacts sont les fermés bornés.

Ex 22 : L'ensemble $O_n(\mathbb{R})=\{M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM=I_n\}$ est compact.

Rq 23 : Le corollaire 21 est faux en dimension infinie. C'est ce qu'illustre le théorème de Riesz plus loin.

Prop 24 : Soit $F\subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit $x\in E$. Alors la distance $d(x,F)$ est atteinte i.e. $\exists y\in F$ tel que $d(x,F)=\|x-y\|$.

Th 26 : (Théorème de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

II. Extremum, théorèmes de points fixes et applications

Th 27 : (Théorème des bornes) Soient (E,d), (F,d') deux métriques, $K\subset E$ compact et $f:E\to F$ continue. Alors f est bornée sur K et y atteint ses bornes.

App 28 : Tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Th 29 : (Théorème de Rolle) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tq $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tq $f'(c)=0$.

Rq 30 : C'est faux pour $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. Par exemple $f:t\mapsto e^{it}$ s'annule en 0 et 2π mais $f':t\mapsto ie^{it}$ ne s'annule pas sur $]0,2\pi[$.

Prop 31 : Soient $n\geq 2$ et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue telle que $f^{-1}(\{a\})$ est compact, $\forall a\in\mathbb{R}^m$. Alors f admet un extremum global.

2) Théorèmes de points fixes

Th 32 : Soient (E,d) un métrique compact et $f:E\to E$ tq : $\forall x,y\in E$, $x\neq y$, $d(f(x),f(y))<d(x,y)$.
Alors il existe un unique $a\in E$ tq $f(a)=a$. De plus, pour tout $x_0\in E$, la suite des itérées partant x_0 converge vers a.

Ex 33 : $x\mapsto\sin(x)$ admet un unique point fixe sur $[-\pi,\pi]$.

Rq 34 : Les hypothèses sont essentielles. Si E n'est pas compact : $x\in\mathbb{R}\mapsto\sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe.
Si l'inégalité est large : la rotation $z\mapsto ze^{i\theta}$, $\theta\neq 0\ [2\pi]$ n'a pas de point fixe.
La convergence n'est pas forcément géométrique comme pour le point fixe de Banach : pour $f=\sin$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, $x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$.

Th 35 : Soit E un convexe compact d'un evn. Soit $f:E\to E$ tq : $\forall x,y\in E$, $\|f(x)-f(y)\|\leq\|x-y\|$. Alors f admet au moins un point fixe.

Rq 36 : C'est faux si E n'est pas compact : $f:x\mapsto x+1$ sur $\mathbb{R}$.
Le point fixe n'est pas toujours unique : $f:x\mapsto x$ sur $[0,1]$.

Def 37 : Soit $C\subset E$. On appelle enveloppe convexe de C et on note $\mathrm{Conv}(C)$ le plus petit convexe de E contenant C. C'est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de C. (cf Annexe 1).

Th 38 : (Théorème de Carathéodory) Si on suppose que E est de dim. finie n, alors toute combinaison convexe d'éléments de E peut s'écrire à partir de $(n+1)$-éléments. Autrement dit, pour $C\subset E$, $\mathrm{Conv}(C)=\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i,\ x_i\in C,\ \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\}$.

Coro 39 : Soit K un compact de $\mathbb{K}^n$. Alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

Th 40 : (Markov-Kakutani) Soient E euclidien et G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Soit aussi K convexe compact non vide stable par tout élément de G. Alors $\exists x\in K$ tq $\forall g\in G$, $g(x)=x$.

App 41 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

DEV 2

III. Compacité dans les espaces fonctionnels

1) Quelques résultats

Th 42 : (Heine) Soient (E,d) et (F,d') deux métriques avec E compact. Alors $f:E\to F$ continue est uniformément continue

App 43 : Les fonctions continues et périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont uniformément continues.

Prop 44 : (Deuxième théorème de Dini) Soient (X,d) compact et $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes tq $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f continue.

Rq 45 : La limite f doit être continue : cf $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$

App 46 : (Glivenko-Cantelli) X v.a. et (X_n) v.a. iid de même loi que X. Soient F la fonction de répartition de X et F_n définies par $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,t]}(X_k)$. Alors presque sûrement, $\|F_n - F\|_\infty \to 0$.

Th 47 : (Weierstrass) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité défini par $\omega(\delta) = \sup\{|f(u)-f(v)| ; |u-v| \leq \delta\}$.
Notons $B_n f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ le n-ième polynôme de Bernstein de f.
Alors $(B_n f)_{n\geq 0}$ converge unif. vers f et $\|f - B_n f\|_\infty \leq C.\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Rq 48 : La vitesse de convergeance est optimale cf $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$.
De plus, le résultat est faux sur $\mathbb{R}$: cf les polynômes.

App 49 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue tq $\forall n, \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$. Alors $f = 0$.

Prop 50 : L'image d'un compact par une application continue est compacte. C'est en général faux pour les images réciproques.

C-Ex 51 : $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

App 52 : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2) Théorème d'Ascoli

Def 53 : On dit de $A \subset E$ qu'elle est relativement compacte si $\bar{A}$ est compacte.

Th 54 : (Ascoli) Soient K métrique compact et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ muni de la norme infinie. Alors on a équivalence entre :
1) $\mathcal{A}$ est relativement compacte
2) $\mathcal{A}$ est équicontinue et pour tout $x \in K$, $\mathcal{A}_x = \{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné.

Ex 55 : Considérons $V \subset \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ le sous-espace de fonctions L-lipschitziennes qui s'annulent en 0. Alors V relativement compact.

3) Fonctions holomorphes

Dans tout ce qui suit, Ω est un ouvert connexe non vide.

Def 56 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holo. sur Ω. On dit qu'elle converge unif sur tout compact de Ω (uc) si $\forall K \subset \Omega$ compact, $\|f_n - f\|_{\infty,K} := \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Th 57 : (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge u.c. vers f. Alors f est holomorphe et $(f_n')_{n\geq 0}$ converge u.c. vers f'.

Ex 58 : $\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ définie sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ est holomorphe.

Prop 59 : Un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ peut s'écrire comme réunion exhaustive de compacts i.e. $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ où chaque K_n est compact et $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$.

Ex 60 : En pratique on peut prendre $K_n = \{z \in \Omega ; d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$.
$|z| \leq n$

Th 61 : Soit $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite exhaustive de compacts de Ω.
On pose $p_n(f) := \sup_{z\in K_n} |f(z)|$ (ce sont des semi-normes) et
$d(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$ pour $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Alors d est une métrique sur $\mathcal{H}(\Omega)$ tq $d(f,g) = d(f-g, 0)$.
De plus, si $(f_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a équiv. entre :
1) $f_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} f$ u.c.
2) $d(f_j, f) \to 0$.

En conséquence, $\mathcal{H}(\Omega)$ est complet pour d, et la topologie qu'elle définit s'appelle la topologie de Fréchet sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Rq 62 : Avec cette métrique, on s'assure qu'une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ est de Cauchy dans $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact.

Def 63 : Une suite $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ est appelée famille normale si l'on peut en extraire une sous-suite qui converge u.c.

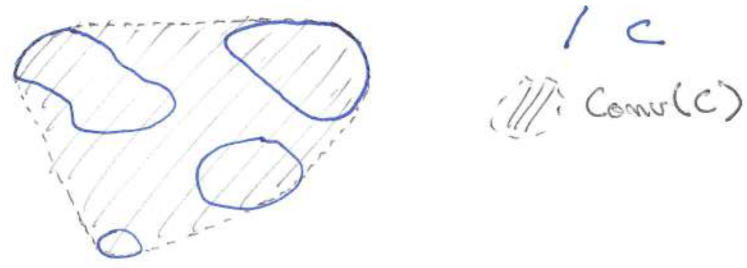
Th 64 : (Montel) Si $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur tout compact de Ω i.e. $\forall K \subset \Omega$ compact, il existe $M_K > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty,K} \leq M_K$; alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est normale.

Ex 65 : Il n'existe pas de suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes qui vérifient les conditions :
1) $\forall n \geq 1$, $P_n(0) = 1$
2) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3) $\sup\{|P_n(z)| ; |z| = 1, n \geq 1\} < +\infty$.

Coro 66 : Une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

Th 67 : Les théorèmes de Montel et Weierstrass donnent alors :
1) $\mathcal{H}(\Omega)$ est un sev fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω.
2) $f \mapsto f'$ est continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$.
3) Les bornés de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont relativement compacts.

Annexe 1



Références :

* Hervé Queffélec, "Topologie".
* Xavier Gourdon, "Analyse".
* Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, "Oraux X-ENS Analyse 2".
* Claude Zuily, Hervé Queffélec, "Analyse pour l'agrégation".
* Frédéric Testard, "Analyse mathématique, la maîtrise de l'implicite".
* Andrei Iordan, Vincent Michel, "Analyse complexe".
* Eric Amar, "Analyse complexe".