204 - Connexité. Exemples et applications

I - Notion de connexité

1) Définitions et premières caractérisations

- ↪ Définition de la connexité. Définition de la connexité pour la topologie induite. Exemple : $\mathbb{R}$ est connexe, $[0,1]$ est connexe.
- ↪ Caractérisation $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_i$ ouverts disjoints, alors $A \subset \mathcal{O}_1$ ou $A \subset \mathcal{O}_2$. Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe ($\mathbb{Q} \subset]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$). Caractérisation similaire avec les fermés.
- ↪ L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un compact, tq $d(u_{n+1,u_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ est un connexe compact. Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f : [a,b] \to [a,b]$ continues.
- ↪ Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- ↪ (X, τ) est connexe ssi toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est continue.

2) Propriétés

- ↪ Image d'un connexe par une application continue. Conséquence : le TVI.
- ↪ Dans $\mathbb{R}$, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. La réciproque est fausse cf fonctions de Darboux.
- ↪ Théorème de Darboux : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable alors $f'(I)$ est un intervalle.
- ↪ (Application) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \mapsto \mathbb{R}$, alors si F ne vérifie pas le TVI sur un intervalle $J \subset I$ alors F n'admet pas de primitive sur I.
- ↪ La fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
- ↪ Ce n'est plus vrai pour les images réciproques. Cf $\mathbb{R}^* = \det^{-1}(GL_n(\mathbb{C}))$.
- ↪ Union de connexe avec des intersections non vides est encore connexe. Faire un dessin avec des intervalles dans $\mathbb{R}$.
- ↪ On a besoin du caractère non disjoints, par ex : $]0,1[\cup]1,2[$ n'est pas connexe.
- ↪ Soit A une partie connexe de X et $B \subset X$ tels que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.
- ↪ Corollaire : Si A est un connexe de X alors $\bar{A}$ est connexe.
- ↪ Le produit de connexes est connexe. Par exemple les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.

3) Composantes connexes et connexité par arcs

- ↪ Notion de composante connexe. Relation d'équivalence "appartenir à la même composante connexe".
- ↪ Exemple : composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
- ↪ Les composantes des éléments d'un espace topologique sont fermées et disjointes deux à deux. En particulier, elles partitionnent l'espace. Attention à la topologie. Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont fermées dans $GL_n(\mathbb{R})$ (mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- ↪ Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ sont réduites à un point (donc des fermés) .
- ↪ Définition de connexité par arcs. Exemple : la sphère est connexe par arcs, même si on enlève un point. Généralisation aux dimensions supérieures en sectionnant la sphère.
- ↪ Connexe par arcs implique connexe. Dans un evn, les ouverts connexes sont connexes par arcs.
- ↪ Contre-exemple : l'adhérence de $\{(x, sin(1/x)), x > 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est connexe mais pas connexe par arcs.

II - Calcul diff et algèbre linéaire

1) Calcul diff

- ↪ Si la différentielle est nulle, la fonction est nulle sur chaque composante connexe. En particulier constante si l'ouvert est simplement connexe. Contre-exemple quand on a pas la connexité.
- ↪ En distribution, résolution de $T' = 0$. Application à la résolution de $xT' + T = 0$.
- ↪ Les homéomorphismes échangent les composantes connexes.

2) Topologie des groupes matriciels

$\hookrightarrow$ $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe. C'est faux dans $\mathbb{R}$. Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont GL_n^+ et GL_n^-.

$\hookrightarrow$ $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe compact.

$\hookrightarrow$ $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact non connexe. Ses composantes connexes sont $S\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_n^-$.

$\hookrightarrow$ Surjectivité de l'exponentielle $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$.

$\hookrightarrow$ $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

$\hookrightarrow$ L'ensemble des matrices de rang r est connexe par arcs.

$\hookrightarrow$ L'ensemble des matrices diagonalisables/ trigonalisables / ayant n valeurs propres distinctes est connexe par arcs.

$\hookrightarrow$ L'ensemble des matrices compagnons est connexe par arcs.

III - Connexité et analyse complexe

1) Rigidité de l'holomorphie

$\hookrightarrow$ Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Il y a équivalence :

1. f est constante sur U
2. $Re(f)$ est constante sur U
3. $Im(f)$ est constante sur U
4. $|f|$ est constante sur U
5. $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$

$\hookrightarrow$ Si f est holo sur U alors : $Im(f) = Re(f)^2$ ssi $f = \lambda^2 + i\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ prolongement analytique

$\hookrightarrow$ thm des zeros isolés

$\hookrightarrow$ Application : la seule fonction C_c^∞ ayant pour transformée de Fourier une fonction C_c^∞ est la fonction nulle.

2) Théorie de l'indice ([Tauvel])

$\hookrightarrow$ Définition de l'indice comme $ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$dtx. Fait qu'elle est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante sur les composantes connexes de U, et nulle sur la composante connexe non bornée.

$\hookrightarrow$ Interprétation comme le nombre de tours fait par γ.

$\hookrightarrow$ Une fonction continue de U dans $\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si son intégrale sur tout lacet est nulle.

Références :

— Hervé Queffélec, "Topologie".

— Martine Queffélec, Hervé Queffélec, "Analyse complexe".

— Patrice Tauvel, "Analyse complexe".

— Xavier Gourdon, "Analyse".

— Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, "Oraux X-ENS Analyse 3".

— R. Mneimné et F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classique, Hermann, 1986.