Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Victor VOISIN & BJ

Novembre 2022

Cette leçon doit être très riche en exemples. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). Trop de candidats manquent d'aisance avec le calcul d'intégrales multiples. Le calcul de l'intégrale d'une gaussienne sur Rn ou le calcul du volume de la boule unité de Rn ne devraient pas poser de problèmes insurmontables. Le programme du concours indique que la formule d'intégration par parties multidimensionnelle qui relie intégrale de volume et intégrale de surface est admise ; il ne faut pas hésiter à l'exploiter et à l'illustrer par des exemples. On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus. On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plan- cherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales. Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.), une piste qui mériterait d'être davantage explorée.

1 Techniques de calcul d'intégrales [GOURDON]

1.1 Cas du segment

— Identification d'une primitive (en annexe un tableau des primitives usuelles), exemple de $\frac{1}{t\ln(t)}$, intégration par parties, exemple de $\ln(t)$ et des intégrales de Wallis, changement de variable, exemple de l'aire du demi-cercle "positif"
— Techniques de calcul avec les fonctions circulaires : linéarisation, $e^{ax}\cos(bx)$ et $e^{ax}\sin(bx)$
— Décomposition en éléments simples, exemple simple, en application : la décomposition de Dunford, les formules de Bioche, du changement de variable $x = \tan(\frac{\theta}{2})$, exemple de $\frac{1}{\sin(t)}$
—

1.2 Cas d'un intervalle quelconque

— IPP, fonction Γ changement de variable, application à $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8}$
— Quelques intégrales usuelles : intégrales de Riemann, intégrales de Bertrand,
— règle d'Abel, exemple des "intégrales de Hardy"
— (Estimation des restes ou des intégrales avec les équivalents ? Comparaison séries/intégrales ?)

2 Intégration de Lebesgue [Briane-Pagès]

2.1 Premiers Théorèmes d'intégration

— Théorème de Convergence monotone, exemple de l'intervertion série/intégrale, lemme de Fatou, (exemple de la complétude de la distance en variation totale ?), Théorème de Convergence dominée, exemple du reste d'une intégrale d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, application au Théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre, de continuité des intégrales à paramètre
— Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, exemple de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(t^2+1)}}{t^2+1}dt$, autre exemple à chercher
— Trouver des équa diffs
— Technique de Feynman : il s'agit d'introduire un paramètre $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2)\cos(5x)dx/\sqrt{2\pi} = exp(-25/2)$.
—

2.2 Théorème de Fubini

- Théorème de Fubini-Tonelli, Théorème de Fubini-Lebesgue
- Calcul de l'intégrale de la gaussienne
- Application à l'inversion de la fonction caractéristique et à la description de la loi d'une variable discrète ou d'une variable à fonction caractéristique intégrable. (DVT 1)
- Fonction beta

2.3 Changement de variable et "intégration par parties" en multidimentionel

- Changement de variable, application au volume de la boule unité
- Changements polaires, cylindriques, sphériques
- Théorème de Stokes, application à la formule de Green-Riemann (et point fixe de Brouwer ?, risqué je pense)
-

3 Techniques dans d'autres domaines

3.1 Analyse complexe [Queffelec-Queffelec]

- Intégrales sur un chemin, holomorphie sous l'intégrale, un exemple ?
- Formule de Cauhcy, application au calcul de $\int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{1}{z}$
- Théorie de l'indice : définition, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, intérieur et extérieur d'un chemin
- Application du fait qu'une fonction holomorphe soit d'intégrale nulle sur un lacet : $\int_{\mathbb{R}} \frac{1-cos(x)}{x^2}dx = \pi$. (considérer $f(z) = (1-\exp(iz))/z^2$ et un demi-cercle en enlevant un cercle en 0)
- Intégrale de Dirichlet, même contour (MI-DVT 2 Jérémy)
- Intégrales de Fresnel : intégrer sur un quart de cercle trigo revenant en 0 : $\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \sqrt{2\pi}/4$.
- Définition d'un résidu, premières propriétés sur les résidus, application au Théorème de comptage des zéros
- Théorème des résidus, application au calcul d'intégrales de fractions rationnels, d'intégrales trigonométriques
- Autre application : Formule des compléments (DVT 1 Jérémy & DVT 2 Vivi)
- les 6 règles de calcul des résidus, application au calcul des résidus de $\frac{z^2}{z^4+1}$
- Théorème des résidus pour les fonctions méromorphes (contre-ex ?)
- Ex. : intégrale de $\frac{1}{sin}$ autour du cercle trigo
- App. : intégrale de $\frac{1}{a+\cos(t)}$ sur $[0, 2\pi]$ pour $a > 1$ qui vaut $2\pi/\sqrt{a^2-1}$; calcul de $\frac{1}{1+t^6}$ sur $\mathbb{R}$
- Appli des résidus et du log : pour $a > 0$: $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}\log(a)$. demi cercle de rayon R en enlevant un petit cercle en 0 de rayon epsilon OU utiliser le contour en trou de serrure avec $f(z) = \log(z)^2/(z^2+a^2)$.

3.2 Analyse de Fourier [Briane-Pagès]

- Fourier Plancherel, application à l'intégrale de Dirichlet
- Espace de Schwarz, propriétés de stabilité et passage à la transformée de Fourier, exemple de la Gaussienne
- Inversion de Fourier, application à l'injectivité de $\mathscr{F}$.
- Formule de Plancherel et application au calcul de l'intégrale de Dirichlet (MI-DVT 2 Jérémy)
- application à la densité des polynômes orthogonaux (DVT 3 Jérémy & Victor)

3.3 Calcul approché

- Méthode des rectangles, des trapèzes, estimation de l'erreur ($O(\frac{1}{n})$ et $O(\frac{1}{n^2})$ je crois), méthode du point-milieu ?
- exemple avec la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$
- Méthode de Simpson ?
- LGN, TCL, Méthode de Monte-Carlo

4 Références

- Gourdon analyse
- Briane M., Pagès G. - Théorie de l'intégration
- Queffelec Queffelec, Analayse complexe
-