239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I. Théorèmes d'analyse à paramètres réels

A - Théorèmes élémentaires

Thm 1 : (Convergence monotone) Soit (f_n) mesurables positives et f positive tq : a) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall n, \forall x \in X$
b) $f_n(x) \to f(x)$ presque tout $x \in X$

Alors f est mesurable et $\int_X f_n(x) \to \int_X f(x)$

Application 2 : $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/(b-1)$, $(b>1)$

Contre-ex 3 : L'hypothèse de positivité est nécessaire. $f_n = -\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$.

Théorème 4 : (CVD)
Si • (f_n) mesurable, • $f_n(x) \to f(x)$ p.p.t. x.
• $\exists g \in L^1$ tq $\forall n \geq 0$, p.p.t. x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors $f \in L^1$ et $\int |f-f_n| \to 0$.

Thm 5 : (Tonelli) Soit f positive mesurable alors les fonctions composantes et intégrales sont mesurables et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy \quad (*)$$

Thm 6 : (Fubini) Si $f \in L^1(X\times Y)$ et mesurable alors les intégrandes de $(*)$ sont L^1 et $(*)$ reste vraie.

Application 7 : En notant $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x>0$ et $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ $(x,y>0)$ on a :
$\beta(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

B - Théorèmes de régularité

Thm 8 : (Continuité) Si • $\forall x \in X$ $t \mapsto f(t,x)$ mesurable
• Pour μ-p.t. $t \in E$ $x \mapsto f(t,x)$ est cont en x_0.
• $\exists g \in L^1(E)$ $\forall x \in X$ $|f(t,x)| \leq g(t)$ μ-pp. Alors $x \mapsto \int_E f(x,t)\,d\mu(t)$ est C^0 en x_0.

Application 9 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)\,dt$ est $C^0(\mathbb{R})$

Théorème 10 : (Dérivation) Si • $t \mapsto f(x,t)$ est $L^1(E)$ $\forall x \in X$
• $x \mapsto f(x,t) \in C^k(\mathbb{R})$ μ-pp. $\forall t \in E$
• $\forall i \in [\![1,k]\!]$ $\exists g_i \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\forall t \in E$ $|\partial_x^i f(x,t)| \leq g_i(t)$.
Alors $x \mapsto \int_E f(x,t)\,dt \in C^k(X)$; de dérivée i-ème : μ-pp. $x \mapsto \int_E f^{(i)}(x,t)\,dt$.

Exemple 11 : $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et
$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ $(x>0)$.

Contre-ex 12 : $t \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx$ n'est pas continue en 0. $(t \geq 0)$.

Application 13 : (calcul d'intégrale via EDO)
$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-t^2} dt \in C^1(\mathbb{R})$ et vérifie $y'(x) = -xy(x)$.

Application 14 : (régularité). Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $f(0)=0$, alors $x \mapsto \begin{cases} f(x)/x & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Rq 15 : Les théorèmes de régularité pour les séries sont des cas particuliers de ces derniers munis de la mesure de comptage.

C - Equivalents d'intégrales

Thm 16 : (comparaison) Soit $I = [a,b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$
$f : [a,b[\to E$ ($\mathbb{R}$-Banach) ; $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+^*$; $f,g \in C_{pm}$.
i) Si $\int_a^b g$ diverge alors $f = o(g)$ entraîne $\int_a^x f(t)\,dt = o\left(\int_a^x g(t)\right)$
ii) Si $\int_a^b g$ converge alors $f = o(g)$ entraîne $\int_x^b f(t)\,dt = o\left(\int_x^b g(t)\right)$
De même pour $\sim$ et O.

Exemple 17 : $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}$ $(x \geq 2)$

Thm 18 : (Abel) Soit f positive sur $[a,b[$, g continue sur $[a,b[$.
Si • f est décroissante sur $[a,b[$ et $f(x) \underset{x\to b}{\to} 0$
• $\exists M>0\ \forall x\in[a,b[\ \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$
Alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ converge et $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq M f(a)$.

Application 19 : (Dirichlet) On pose $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$ $(t\geq 0)$
• $F\in C^1(]0,+\infty[)$, $F(t) = \pi/2 - \arctan t$ $(t>0)$.
• $\left|F(t) - \underbrace{\int_0^n e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx}_{:=F_n(t)}\right| \leq 3/n$ • $F_n \underset{cvu}{\to} F$ sur $\mathbb{R}^+$.
• $F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$

II. Analyse complexe

Rq 20 : Le théorème suivant est le pendant du théorème de régularité, pour les fonctions holomorphes.

Thm 21 : (Holomorphie sous l'intégrale) • Si $f(\cdot,x)$ est p.s holomorphe en $z_0\in\Omega$ ouvert. • $f(z,\cdot)\in L^1(E)$ $\forall z\in\Omega$
• $\forall K$ compact de Ω $\exists g\in L^1(K)$ tq $|\partial_z f(z,x)| \leq |g(x)|$.
Alors $z\mapsto \int_E f(z,x)\,dx$ est holomorphe au voisinage de z_0.

Ex 22 : $\Gamma : z\mapsto \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, z>0\}$

A - Théorie de Cauchy et indices

Def 23 : Une courbe γ est une application continue et C^1_{pm} de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

Def 24 : Si $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ est une courbe tq f est $C^0(\gamma([a,b]))$ on a : $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Def 25 : La longueur d'une courbe est $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Prop 26 : Si γ est une courbe de longueur $L(\gamma)$ et si $f\in C^0(\gamma([a,b]))$: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup\{|f(z)|, z\in\gamma([a,b])\}\times L(\gamma)$.

Prop 27 : Si $\gamma = [0,1]\to\mathbb{C}$ est une courbe d'origine u et d'extrémité v et si f est holomorphe sur Ω contenant $\gamma([a,b])$ avec f' continue sur $\gamma([a,b])$ on a : $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(v) - f(u)$
si γ est fermée, $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$

Exemple 28 : Pour une telle courbe, $\int_\gamma z^n\,dz = 0$ $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$

Def 29 : (indice) Pour γ courbe fermée, $a\notin \mathrm{Im}\,\gamma$ on note $I(a,\gamma) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Prop 30 : i) $I(a,\gamma)\in\mathbb{Z}$
ii) $a\mapsto I(a,\gamma)\in C^0(\mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}\,\gamma)$ et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\,\gamma$.
iii) $I(a,\gamma) = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\,\gamma$.

Rq 31 : C'est le nombre de tours orientés que fait γ autour de a.

Prop 32 : Soit U ouvert convexe, γ courbe fermée (= lacet) tq $\mathrm{Im}\,\gamma\subset U$. Si f est holomorphe sur U, alors $\forall z\in U\setminus\mathrm{Im}\,\gamma$ $f(z)\times I(z,\gamma) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw / 2i\pi$

Corollaire 33 : Pour un lacet simple, $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$

Corollaire 34 : On a la formule : $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$ (sous les mêmes conditions)

Thm 35 : (Morera) : Ω domaine de $\mathbb{C}$, $f : \Omega\to\mathbb{C}$ continue.
($\forall\gamma$ lacet dans Ω on a $\int_\gamma f = 0$) ssi (f est holomorphe sur Ω)

Application 36 : (calculs d'intégrales)
i) $\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \pi$ ii) $\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x} = \pi$ iii) $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt$.

B - Résidus et calculs d'intégrales

Def 37 : Si f est holomorphe sur Ω ouvert privé d'un point a, on dit que a est effaçable pour f s'il existe g holomorphe tq $f(z) = g(z)$ $\forall z\in\Omega\setminus\{a\}$. a est un pôle d'ordre m s'il existe $c_1,\dots,c_m$ ($c_{-m}\neq 0$) tq $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité effaçable en a.

Le coefficient c_{-1} s'appelle le résidu de f noté $\operatorname{Res}(f,a)$.

Ex 38 : $z \mapsto e^z/z$ a un pôle d'ordre 1 en 0, de résidu 1.

Def 39 : f est méromorphe si f a un pôle en chaque point de A, f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$, A n'a que des points isolés dans Ω.

Thm 40 : Soit f méromorphe sur Ω, A ses pôles, γ ne rencontrant pas A. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in A} I(a,\gamma)\operatorname{Res}(f,a)$.

Rq 41 : Pour un lacet simple, $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f,a)$.

Application 42 : (intégrales à paramètres) [cf. Annexe]

i) $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^m} = \frac{\pi/m}{\sin(\pi/m)}$ $(m \geq 2)$ ii) $I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^4}dt = \left(\cos\left(\frac{|x|}{\sqrt2}\right)+\sin\left(\frac{|x|}{\sqrt2}\right)\right) \times e^{-|x|/\sqrt2}\,\pi/\sqrt2$

iii) $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(\log x)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi \log(a)}{2a}$ $(a>0)$ iv) $J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ $(a>1)$

Thm 43 : (Formule des compléments) Pour $z \in \mathbb{C}$ tq $0<\operatorname{Re} z<1$ on a :
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{z-1}}{v+1}dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{zx}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Application 44 : $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Thm 45 : (Bergman) On définit l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire de L^2. Soit $F \in B^2(\mathbb{D})$ alors : $\forall \xi \in \mathbb{D}$ $F(\xi) = \int_{\mathbb{D}} \frac{F(z)}{\pi(1-\xi\bar z)^2}dz$.

~~III~~ - Convolution et analyse de Fourier

A - Convolution :

Soit $p \in [1,+\infty]$ et q tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Def 46 : $f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ est la convolée de f et g.

Thm 47 : i) $f\in L^1$, $g \in L^p$: $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$ et $f*g$ existe p.p.
ii) $f \in L^p$, $g\in L^q$: $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$ et $f*g$ existe partout.

Prop 48 : $(L^1(\mathbb{R}^d),+,*)$ est une algèbre de Banach sans unité.

Application 49 : La somme de 2 variables indépendantes de densités f et g a pour densité $f*g$.

Ex 50 : $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$, $X_1 \perp X_2$ donne $X_1+X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1+\sigma_2)$

Prop 51 : Si $f\in L^1$, $f\in C_c^k$ alors $f*g \in C^k$ et on a $\forall |\alpha| \leq k$ $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g$

B - Transformée de Fourier

Def 52 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(t)dt = \mathcal{F}(f)(x)$.

Prop 53 : $\mathcal{F}$ est linéaire et pour $f\in L^1$, $\hat f$ est uniformément continue

Lm 54 : (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1$ alors $\hat f \in C_0(\mathbb{R})$

Prop 55 : $\widehat{f*g} = \hat f \times \hat g$ pour $f,g \in L^1$

Prop 56 : Si $x \mapsto x^k f(x) \in L^1$ alors $\hat f \in C^k$ avec $(\hat f)^{(k)}(x) = (-i)^k \widehat{\xi^k f}$.

Prop 57 : $f, f' \in L^1$ donne $\widehat{f^{(k)}}(x) = (-ix)^k \hat f(x)$

Ex 58 : $\hat{\mathbb{1}}_{[-a,a]}(x) = 2\frac{\sin(ax)}{x}$ $(a>0)$; $\widehat{e^{-ax^2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-x^2/4a}$ $(a>0)$

Thm 59 : (inversion) Si $f\in L^1$, $\hat f \in L^1$ alors $f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat f}(-x)$ p.p.

Ex 60 : $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ d'où $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$

Rq 61 : $\mathcal{F}$ est injective sur L^1.

Application 62 : Soit ρ une fonction poids. Si $\exists \alpha>0$ tq $\int_I e^{-\alpha|x|}\rho(x)<\infty$ alors, pour le p.s L^2 de poids ρ, l'unique famille (P_n) orthogonale et échelonnée en degré est une base hilbertienne de $L^2(I)$ de poids ρ.

Thm 63 : (Plancherel) $\|\hat f\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$ pour $f\in L^2$.

Ex 64 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)^2}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

C - Fonctions caractéristiques

X est une variable aléatoire.

Def 65 : $\varphi_X : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx}dP_X(t)$ est la fonction caractéristique de X.

Prop 66 : φ_X caractérise la loi de X. $= \mathbb{E}(e^{itX})$ [lois usuelles en annexe]

Prop 67 : $X \perp Y$ ssi $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$

Prop 68 : • Si $\mathbb{E}(|X|^n)<+\infty$ alors $\varphi \in C^n$, $\varphi^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}(X^k e^{itX})$
• Si $\varphi_X \in C^n$ alors $\mathbb{E}(X^{2\lfloor n/2\rfloor})<+\infty$

Application 69 : (théorème des moments) Si φ_X est analytique alors X est caractérisé par ses moments.

Corollaire 70 : (CS) Il suffit d'avoir $\overline{\lim}\, \mathbb{E}(|X|^n)^{1/n}/n < +\infty$ pour que φ soit analytique.

Corollaire 71 : Si X est à support fini, X est caractérisé par ses moments

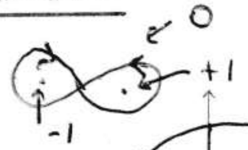
Ex 72 : La loi bêta est caractérisée par ses moments, la loi Γ aussi.

Corollaire 73 : Si $\exists \alpha>0$ tq $\mathbb{E}(e^{|X|\alpha})<+\infty$ alors X est caractérisé.

Ex 74 : les lois de Poisson, géométrique sont caractérisées par les moments

Annexe :

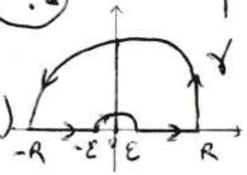
Indice : (prop 30)



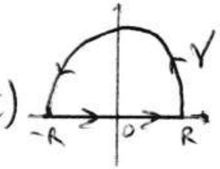
que vaut l'indice ?

Quelques chemins : (application 36)

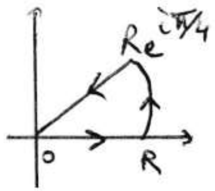
i)



ii)

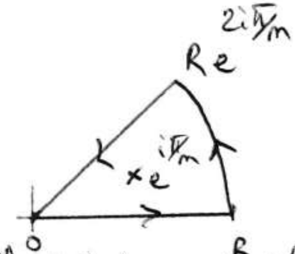


iii)



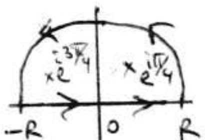
Pour des fonctions méromorphes : (application 42)

i)



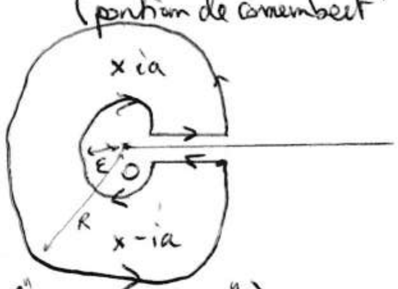
("portion de camembert")

ii)



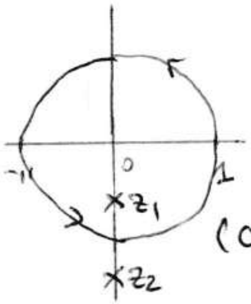
("demi-camembert")

iii)



("trou de serrure")

iv)



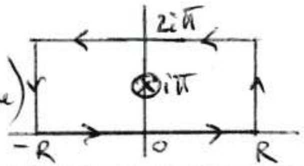
$z_1 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$

$z_2 = -ia - i\sqrt{a^2-1}$

(cercle unité)

v) (théorème 43)

("contour rectangulaire")



Fonctions caractéristiques usuelles

Loi	Fonction caractéristique
Loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$	$e^{-t^2/2}$
Loi Binomiale $B(n,p)$	$(e^{it}p + 1 - p)^n$
Loi Géométrique $G(p)$	$p/(e^{-it} + p - 1)$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Loi Uniforme $\mathcal{U}[0,1]$	$e^{it/2}\,\mathrm{sinc}(t/2)$
Loi de Cauchy $\mathcal{E}(1)$	$e^{-\lvert t \rvert}$
Loi Gamma $\Gamma(\lambda, a)$	$(\lambda/(\lambda - it))^a$
Loi Log-Normale $LN(0,1)$	Pas d'expression explicite

Rq : $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$.