Leçon 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Victor VOISIN et Jérémy BETTINGER

Novembre 2022

Cette reformulation a pour objectif d'ourir des points d'entrée plus variés à cette leçon. Ainsi, il est possible, dans un premier temps et si le candidat le souhaite, de parler de polynômes de la variable complexe, de fractions rationnelles, de séries entières, sans immédiatement exposer la théorie des fonctions holomorphes. Le jury attend des exemples illustrant ces notions et montrant la maîtrise des candidats sur ces points. Concernant les questions d'holomorphie, outre la définition, la signification géométrique des équations de Cauchy-Riemann, la formule de Cauchy et les résultats concernant l'analyticité, le principe des zéros isolés, ou encore le principe du maximum, sont des attendus de cette leçon. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $^{\mathbf{3}}$ fpzq dz a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta,...). Même si cela ne constitue pas le c÷ur de la leçon, la dénition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) peut être présentée à condition que cette notion soit maîtrisée et accompagnée d'exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que le prolongement de la fonction Gamma en fonction méromorphe est très souvent proposé mais insusamment maîtrisé. Proposer un développement moins ambitieux mais maîtrisé est une stratégie plus payante, qui ouvre la discussion avec le jury de manière plus positive. Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon ore des possibilités d'ouverture en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau qui ne doit pas être abordé sans une bonne maîtrise des questions en jeu.

1 Définition de l'holomorphie

1.1 $\mathbb{C}$-dérivabilité, fonctions holomorphes

- $\mathbb{C}$-dérivabilité, équations de Cauchy-Riemann, caractérisation avec la différentiabilité
- Holomorphie, ensemble $\mathscr{H}(U)$ des fonctions holomorphes
- Réécriture des équations de Cauchy-Riemann avec $\partial_z(f)$ et $\partial_{\overline{z}}(f)$

1.2 Exemples de fonctions holomorphes ou non holomorphes

- Exemple des fonctions z et 1, contre-exemple de la conjugaison complexe
- Stabilité de l'holomorphie par somme, différence, par quotient avec un dénominateur qui ne s'annule pas
- App. : les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, idem pour les fractions rationnelles si on enlève à $\mathbb{C}$ les racines du dénominateur.
- Utilisation des équations de Cauchy-Riemann pour mq toute fonction holomorphe à valeurs réelles ou de module constant est constante.
- App. : parties réelle/imaginaire et le module ne sont pas holomorphes
- Stabilité par composition et par bijection réciproque si f est bijective (inversion locale).
- Une série entière est de classe C sur son disque ouvert de convergence et y est holomorphe (différentiation sous le signe somme et convergence normale)
- App. : exp, cos, sin, cosh, sinh, le log sur la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1
- App. (de la bijection réciproque) : la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}^-$ (prendre l'argument principal sur $]-\pi, \pi[$)
- Conséquence : définition de la fonction puissance.

2 Théorie de Cauchy et conséquences

2.1 Chemins paramétrés et formule de Cauchy

- Chemin paramétré (continu de classe C^1 ou $C^1\mathscr{M}$), chemins équivalents, Ex. : paramétrisation du cercle
- Intégrale sur un chemin paramétré, invariance de l'intégrale par équivalence des chemins
- Ex. : intégrale de $\frac{1}{z-a}$ sur un cercle centré en a, longueur d'un chemin et invariance par équivalence des chemins, exemple majoration standarde
- Lemme de Goursat, version renforcée, Théorème de Cauchy, version renforcée, formule de Cauchy,
- Ex. : calcul de l'intégrale de $\frac{1}{z^2-1}$ sur un cercle de centre 1 qui ne contient pas -1 dans la boule associée.
- formule de la moyenne, formule du maximum

2.2 Analycité des fonctions holomorphes

- Déf. de DSE ; la formule de Cauchy mq les fonctions holomorphes sont DSE au vois. de tout point (et en fait sur toute boule ouverte contenue dans l'ouvert considéré), formule de Cauchy "généralisée",
- Ex. : $\frac{1}{1-z}$ est développable en série entière au vois. de 1 sur $\mathscr{B}_0(1,1)$,
- Ex. : $\binom{n}{k} = \dfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \dfrac{(z+1)^n}{z^k}dz$
- Csq. : les fonctions holomorphes sont de classe C^∞, ATTENTION une fonction sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ n'est pas forcément analytique : exemple de $e^{\frac{1}{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$
- Théorème de prolongement de Riemann (En utilisant le Th. de Cauchy et le DSE d'une primitve de $(z-c)f(z)$), exemple du sinus cardinal.
- Principe des zéros isolés, Théorème d'égalité (un contre-exemple avec deux boules ouvertes), Csq. : Prolongement analytique (ajouter que le $f^{-1}(a)$ d'une fonction holomorphe non localement constante est discret ?), Contre-ex. pour l'intersection de deux ouverts sur lesquels on fait deux prolongements : logarithmes sur des ouverts différents, on peut avoir des phases différentes
- Contre exemple quand il n'y a pas de point d'accumulation (sinus)
- exemple des zéros isolés : appli a la transformée de fourier : la seule fonction C_c^∞ ayant pour transformée de Fourier une fonction C_c^∞ est la fonction nulle.

2.3 Inégalités de Cauchy et applications

- Inégalité de Cauchy sur un disque ou un compact K, conséquence pour la borne sur les coefficients $|a_n|$
- Théorème de Weierstrass, App. : définition de ζ.
- Th. de l'holomorphie sous l'intégrale, App. : définition de la fonction Γ.
- Calcul de la transformée de la gaussienne en faisant le changement de variable $u = t + i\xi$ valable pour $u = t + z$ avec z réel, puis prolongement analytique (holomorphie sous l'intégrale).
- App. : Densité des polynômes orthogonaux (DVT 1)
- App. : Espace de Bergman (DVT 2)
- formule de Gutzmer, principe du maximum (pas de principe du minimum, prendre par exemple z^2, prendre le même exemple pour montrer l'importance d'être supérieur au sup sur le cercle), App. : Th. de Liouville (contre-exemple sur $\mathbb{D}$ avec l'identité, le demi-plan de Poincaré dans $\mathbb{D}$ avec l'application de Cayley ?),
- App. : Th. de d'Alembert-Gauss + d'Alembert Gauss
- Lemme de Schwarz, fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ non bijective admet au plus un point fixe.
- Théorème de Koenig : si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe non bijective admettant α comme point fixe, alors $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \mapsto g \circ f$ admet $f'(\alpha)^k$ comme valeurs propres, toutes de multiplicité 1 (selon Vidal, cela donne un aperçu de la notion de compacité des opérateurs dans des espaces de fonctions holomorphes)
- Une fonction f est holomorphe si sur tout lacet dont l'intérieur est inclus dans son ouvert de définition son intégrale vaut 0.
- Application du fait qu'une fonction holomorphe soit d'intégrale nulle sur un lacet : $\int_{\mathbb{R}} \dfrac{1-cos(x)}{x^2}dx = \pi$. (considérer $f(z) = (1-\exp(iz))/z^2$ et un demi-cercle en enlevant un cercle en 0)
- Intégrale de Dirichlet, même contour
- Intégrales de Fresnel : intégrer sur un quart de cercle trigo revenant en 0 : $\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \sqrt{2\pi}/4$.

3 Étude des fonctions méromorphes

3.1 Singularités et séries de Laurent

- Singularités effaçables, singularités en pôles, singularités essentielles, ordre d'un pôle
- Caractérisation des pôles d'ordre fixé, écriture d'une fonction admettant un pôle en série de Laurent.
- Ex. : $\frac{1}{sin(z)}$ admet un pôle simple en 0, $\frac{1-cos(z)}{z^2}$ admet 0 pour singularité effaçable, $e^{\frac{1}{z}}$ admet une singularité essentielle en 0, même si restreint à $\mathbb{R}$ cette fonction est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
- Caractérisation des singularités essentielles par densité de l'image de f au voisinage de la singularité

3.2 Théorie des résidus

- Définition de fonction méromorphe, Ex. : fractions rationnelles
- résidu d'une fonction, formule générale en une singularité effaçable et en un pôle
- les 6 règles de calcul des résidus, application au calcul des résidus de $\frac{z^2}{z^4+1}$
- Théorème des résidus pour les fonctions méromorphes (contre-ex ?)
- Ex. : intégrale de $\frac{1}{sin}$ autour du cercle trigo
- App. : intégrale de $\frac{1}{a+\cos(t)}$ sur $[0, 2\pi]$ pour $a > 1$ qui vaut $2\pi/\sqrt{a^2-1}$; calcul de $\frac{1}{1+t^6}$ sur $\mathbb{R}$
- App. des résidus : calcul de $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{5^n} = \sqrt{5}$.
- Appli des résidus et du log : pour $a > 0$: $\int_0^\infty \dfrac{\log(x)}{x^2+a^2}dx = \dfrac{\pi}{2a}\log(a)$. demi cercle de rayon R en enlevant un petit cercle en 0 de rayon epsilon OU utiliser le contour en trou de serrure avec $f(z) = \log(z)^2/(z^2+a^2)$.
- App. : Théorème de comptage des zéros, Théorème de Rouché

3.3 Exemple d'application : la fonction Γ

- Définition de la fonction Γ sous forme intégrale, formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- Prolongement de la fonction Γ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, étude des pôles de Γ sur $\mathbb{Z}^-$
- Holomorphie de la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \Gamma(z) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$
- Formule des compléments sur le rectangle (DVT 3)
- App. : Autre façon de calculer l'intégrale de Gauss, de prolonger Γ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$
- App. : $\frac{1}{\Gamma}$ est entière.

4 Références

- Stein, Shakarchi : Complex Analysis
- Analyse complexe et applications, Hervé Queffelec & Martine Queffelec
- Amar-Matheron
- Jolissaint
- Groux-Soulat