jeremy.bettinger@ens-rennes.fr

265

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

I. Fonctions usuelles

A - Fonction exponentielle

Def 1 : La fonction exponentielle est la fonction exp suivante définie sur $\mathbb{C}$ par : $\exp z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Prop 2 : exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp x = e^x$. En outre, exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp' = \exp$.

Def 3 : On peut définir les fonctions cos et sin :
$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $\quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

Prop 4 : On a : $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

B - Logarithmes et puissances :

Def 5 : Un nombre réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$ est appelé un argument de z.

Def 6 : Un nombre complexe w tel que $z = e^w$ est appelé un logarithme de z.

Ex 7 : $i = e^{i\pi/2}$, $\pi/2$ est un argument de i.

Ex 8 : Pour $t > 0$, $\ln t$ vérifie $t = e^{\ln t}$.

Def 9 : La détermination principale de l'argument est l'appli $\mathrm{Arg} : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \mapsto$ associe l'unique argument de $]-\pi,\pi[$.

Def 10 : La détermination principale du logarithme est l'appli $\mathrm{Log} : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \mapsto \ln|z| + i \,\mathrm{Arg}\, z$.

Rq 11 : En particulier, $\mathrm{Log}|_{\mathbb{R}_+^*} = \ln$

Def 12 : On appelle détermination principale de la puissance α la fonction $p_\alpha = \exp(\alpha \,\mathrm{Log})$.

Rq 13 : Lorsque $x > 0$, $p_\alpha(x) = x^\alpha$.

Def 14 : Une détermination continue du logarithme sur U ouvert de $\mathbb{C}^*$ est une application continue $l : U \to \mathbb{C}$ telle que $e^{l(z)} = z$.

Def 15 : On appelle primitive de f sur U ouvert de $\mathbb{C}$ toute fonction $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $F' = f$.

Thm 16 : U ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.
i) Toute détermination continue du logarithme sur U est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur U.
ii) Si $\frac{1}{z}$ admet une primitive sur U, il existe des déterminations continues du logarithme

Prop 17 : $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ pour $|z| < 1$

Prop 18 : U ouvert de $\mathbb{C}$, f continue sur U. EQUI :
i) f possède une primitive sur U
ii) Pour tout chemin γ fermé dans U, on a $\int_\gamma f = 0$

Ex 19 : Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, γ chemin fermé. On a $\int_\gamma z^n = 0$ si i) $n \geq 0$ ii) $n < -1$ et $0 \notin \mathrm{Im}\,\gamma$.

III. Fonction Gamma d'Euler :

Def 20 : On définit la fonction Gamma par :
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

A - Premiers énoncés analytiques

Prop 21 : On a $\Gamma(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n(s)$ $(\operatorname{Re} s > 0)$
où $\Gamma_n(s) = \int_0^n (1-t/n)^n t^{s-1}\,dt$.
De plus, $\Gamma_n(s) = (n^s n!)/[s(s+1)\dots(s+n)]$

Thm 22 : On a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(\operatorname{Re} s > 0)$

Corollaire 23 : $\Gamma(n+1) = n!$

Thm 24 : Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

DEV 1

Thm 25 : (Formule des compléments)
$\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$

Corollaire 26 : $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Thm 27 : (Weierstrass) Pour $\operatorname{Re} s > 0$:
$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{j\geq 1} \left(1+\frac{s}{j}\right) e^{-s/j}$$

Def 28 : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ $(x>0, y>0)$ est appelée fonction Bêta.

Prop 29 : $\forall x,y>0$ $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

B - La fonction Γ en probabilités

Def 30 : On appelle loi Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ la loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est :
$$x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Rq 31 : La loi $\Gamma(1,\lambda)$ est appelée loi exponentielle.

Prop 32 : $X \sim \Gamma(a,\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}$, $\operatorname{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Prop 33 : Si X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois respectives $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$ alors
$X+Y \sim \Gamma(a+b,\lambda)$

Prop 34 : Si $X_n \sim \Gamma(n,1)$ alors $(X_n - n)/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Application 35 : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ via le TCL.

Def 36 : X suit la loi beta de paramètre $a,b>0$ notée $\beta(a,b)$ si sa densité est : $x \mapsto \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

Prop 37 : $X \sim \beta(a,b)$ alors $\mathbb{E}(X) = \beta(a+1,b)/\beta(a,b)$

Prop 38 : Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi $\Gamma(a,1) = \mathcal{E}(a)$ et $\mathcal{E}(b)$ alors $\frac{X}{X+Y} \sim \beta(a,b)$.

Interlude : problème des moments et fonction Γ :

Def 35 : Pour μ mesure de probabilité, on note $m_n = \int x^n d\mu(x)$ et $\mu_n = \int |x|^n d\mu(x)$ les moments de μ.

Prop 40 : Si la fonction caractéristique d'une v.a X est analytique sur $\mathbb{R}$ alors X est caractérisée par ses moments

Corollaire 41 : Il suffit d'avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{1/n} < +\infty$.

Application 42 : $\mu_n = \lambda^{-n}\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ vérifie le cor. 41 donc Γ est caractérisée par ses moments.

Application 43 : (Autre preuve) Si $X \sim \Gamma(a,\lambda)$, sa fonction caractéristique φ est analytique et vaut $\varphi_X(t) = (1-i\lambda t)^{-a}$.

Corollaire 44 : Si X est à support borné alors X est caractérisée par ses moments.

Application 45 : La loi Beta est caractérisée par ses moments.

III - Fonction Θ et ζ

A - Fonction Θ

Def 46 : Pour $|x|<1$, on définit $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$.

DEV 2

Thm 47 : (formule de Poisson) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1 et vérifiant $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\cdot + 2\pi m)$ converge uniformément sur tout compact et vaut :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, e^{imx}/2\pi$.

Application 48 : On a la formule de la cotangente :
$$\frac{a}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+a^2} = \coth(a\pi) \quad \forall a>0$$

Corollaire 49 : $\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^2} = \zeta(2) = \pi^2/6$.

Rq 50 : En $x=0$ la formule de Poisson donne :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)/2\pi \text{ où } \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$$

Corollaire 51 : $\sqrt{s}\, \Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\pi/s})$ $\forall s>0$

Corollaire 52 : $\Theta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$

B - Fonction ζ

Déf 53 : On définit $\zeta(s) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^s}$ $(Re(s)>0)$

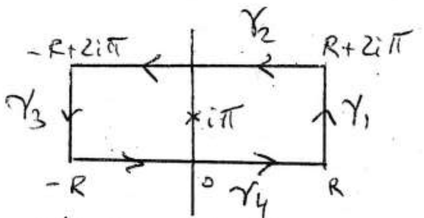
Prop 54 : ζ converge uniformément sur $\{Re(s)>1\}$.

Prop 55 : (Eulérien) $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ $\forall Re(s)>1$

Thm 56 : (admis) ζ vérifie l'équation fonctionnelle :
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{1\})$ $\zeta(1-z) = 2\times(2\pi)^{-z}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Gamma(z)\zeta(z)$

Thm 57 : (Nombres premiers) Soit $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$ $(x\geq 0)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, on a l'équivalent : $\pi(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$.

Annexe :



$\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \gamma_3 \sqcup \gamma_4$

Contour utilisé pour le théorème 25.