Soutenance de stage - 30 août 2021
Jérémy Bettinger

Le théorème des nombres premiers

Sous la direction de Gérald Tenenbaum
à l'Institut Élie Cartan de Lorraine

Sommaire

Introduction
- Énoncé du théorème
- Historique
- Conventions

La démonstration de Zagier
- Produit eulérien
- Prolongement méromorphe de ζ
- Majoration de ϑ
- Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
- Une nouvelle expression de Φ
- Le théorème analytique
- Équivalent de ϑ
- Preuve du théorème

Introduction

Introduction

Théorème des nombres premiers

On a l'équivalent

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

où π est la fonction comptant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

Historique

- Conjecturé par Gauss en 1792.
- Tchebychev a montré en en 1851 que si x est assez grand on a

$$0,92 \, \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1,11 \, \frac{x}{\ln x}$$

- Démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe.

Introduction

Théorème des nombres premiers

On a l'équivalent

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

Historique

- Recherche d'une démonstration élémentaire, sans utiliser l'analyse complexe.
- Résolution en 1949 par Erdős et Selberg.
- Selberg a obtenu pour cela la médaille Fields en 1950.
- En 1984, Daboussi a rédigé la preuve élémentaire la plus efficace.
- Suite aux travaux de Newman, Zagier a publié en 1997 une preuve d'uniquement deux pages avec de l'analyse complexe.

Introduction

Conventions

- x désigne un nombre réel.
- s désigne un nombre complexe noté : $s = \sigma + i\tau$.
- p désigne un nombre premier.
- $P^+(n)$ est le plus grand nombre premier intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de n.
- p_j désigne le j-ème nombre premier.

On introduit la fonction zêta, une série de Dirichlet liée aux nombres premiers et une fonction de Tchébychev :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Phi(s) := \sum_{p} \frac{\ln p}{p^s}, \quad \vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

Remarque

ζ et Φ sont holomorphes sur $\{s \in \mathbb{C}, \sigma > 1\}$.

La démonstration de Zagier

Introduction
Énoncé du théorème
Historique
Conventions

La démonstration de Zagier
Produit eulérien
Prolongement méromorphe de ζ
Majoration de ϑ
Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
Une nouvelle expression de Φ
Le théorème analytique
Équivalent de ϑ
Preuve du théorème

Produit eulérien

Proposition

On a pour $s \in \mathbb{C}, \ \sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Étapes de la preuve

Décomposition en facteurs premiers

On a

$$n = \prod_{\substack{p_j \leqslant P^+(n) \\ k_j \in \mathbb{N}}} p_j^{k_j}.$$

Produit eulérien

Associativité des familles sommables

$$S_q \quad := \quad \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)\leqslant p_q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{k_1\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_q\in\mathbb{N}} \frac{1}{\left(p_1^{k_1}\cdots p_q^{k_q}\right)^s}$$

$$= \quad \prod_{1\leqslant j\leqslant q} \sum_{k=0}^{\infty} p_j^{-ks} = \prod_{1\leqslant j\leqslant q} \frac{1}{1-p_j^{-s}}.$$

Convergence de S_q

$$|\zeta(s) - S_q| = \left| \sum_n \frac{1}{n^s} - \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)\leqslant p_q}} \frac{1}{n^s} \right| \leqslant \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)> p_q}} \frac{1}{n^\sigma} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0.$$

Conclusion

$$\zeta(s) = \lim_{q\to\infty} S_q = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (s\in\mathbb{C},\ \sigma>1).$$

Introduction

Énoncé du théorème

Historique

Conventions

La démonstration de Zagier

Produit eulérien

Prolongement méromorphe de ζ

Majoration de ϑ

Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ

Une nouvelle expression de Φ

Le théorème analytique

Équivalent de ϑ

Preuve du théorème

Prolongement méromorphe de ζ

Proposition

La fonction $s \mapsto \zeta(s) - 1/(s-1)$ se prolonge holomorphiquement à $\{s \in \mathbb{C}, \sigma > 0\}$.

Preuve

On a l'égalité et la majoration suivante pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) \mathrm{d}x.$$

Le membre de droite converge absolument pour $\sigma > 0$, en effet :

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{-s}{u^{s+1}} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant |s| \max_{n \leqslant x \leqslant n+1} \left| \int_n^x \frac{\mathrm{d}u}{u^{s+1}} \right| \leqslant \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

Donc $s \mapsto \zeta(s) - 1/(s-1)$ coïncide sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ avec une fonction holomorphe sur le domaine $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$.

Introduction
Énoncé du théorème
Historique
Conventions

La démonstration de Zagier
Produit eulérien
Prolongement méromorphe de ζ
Majoration de ϑ
Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
Une nouvelle expression de Φ
Le théorème analytique
Équivalent de ϑ
Preuve du théorème

Majoration de ϑ

Proposition

On a la relation de comparaison $\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln p = O(x) \ (x \geqslant 1)$.

Preuve

Par la formule du binôme de Newton on a :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} \cdots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

Or en isolant les nombres premiers,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n) \times (2n-1) \ldots (n+1)}{n!} = \prod_{n < p \leqslant 2n} p \times \underbrace{\prod_{\substack{n \leqslant k \leqslant 2n \\ k \notin \mathbb{P}}} \frac{k}{n!}}_{\geqslant 1}.$$

Ce qui fournit l'inégalité

$$2^{2n} \geqslant \prod_{n < p \leqslant 2n} p = \exp\left(\sum_{n < p \leqslant 2n} \ln p \right) = \exp\left\{ \vartheta(2n) - \vartheta(n) \right\}.$$

Majoration de ϑ

Ce qui donne

$$2n\ln 2 \geqslant \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

En itérant avec $x = 2n$:

$$\begin{array}{rcl} x\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x) - \vartheta(x/2) \\ \dfrac{x}{2}\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x/2) - \vartheta(x/4) \\ \dots & & \dots \\ \dfrac{x}{2^q}\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x/2^q) - \vartheta(x/2^{q+1}) \end{array}$$

Et en sommant on obtient

$$x\ln 2 \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \geqslant \sum_{k=0}^{q} \vartheta(x/2^k) - \vartheta(x/2^{k+1}).$$

On obtient en prenant $q > \left\lfloor \dfrac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$:

$$Cx \geqslant \vartheta(x) \quad \text{avec } C = \ln 2 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2\ln 2.$$

Introduction

Énoncé du théorème

Historique

Conventions

La démonstration de Zagier

Produit eulérien

Prolongement méromorphe de ζ

Majoration de ϑ

Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ

Une nouvelle expression de Φ

Le théorème analytique

Équivalent de ϑ

Preuve du théorème

Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ

Proposition : Non annulation de ζ

Nous avons $\zeta(s) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{C} : \ \sigma \geqslant 1)$.

Idée de la preuve

Regarder le nombre de zéros de ζ en $1 + i\alpha$ et en $1 + 2i\alpha$.

Proposition : Prolongement holomorphe de Φ

$s \mapsto \Phi(s) - 1/(s-1)$ se prolonge holomorphiquement dans un voisinage ouvert Ω de $\{s \in \mathbb{C}, \sigma \geqslant 1\}$.

Idée de la preuve

Établir l'égalité

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = \underbrace{-\sum_{p} \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}}_{\text{holomorphe sur } \sigma > 1/2} - \underbrace{\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right)}_{\text{holomorphe sur } \Omega}.$$

Introduction
Énoncé du théorème
Historique
Conventions

La démonstration de Zagier
Produit eulérien
Prolongement méromorphe de ζ
Majoration de ϑ
Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
Une nouvelle expression de Φ
Le théorème analytique
Équivalent de ϑ
Preuve du théorème

Une nouvelle expression de Φ

Lemme

On a l'expression $\Phi(s) = s \int_0^{+\infty} \frac{\vartheta(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^{st}} \,\mathrm{d}t \quad (\sigma > 1)$.

Preuve

On montre que

$$\Phi(s) := \sum_p \frac{\ln p}{p^s} = \int_1^{+\infty} s \, \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x$$

en utilisant la définition de ϑ et une interversion série intégrale.
On conclut en effectuant le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

Introduction
Énoncé du théorème
Historique
Conventions

La démonstration de Zagier
Produit eulérien
Prolongement méromorphe de ζ
Majoration de ϑ
Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
Une nouvelle expression de Φ
Le théorème analytique
Équivalent de ϑ
Preuve du théorème

Le théorème analytique

Théorème analytique

Si

- f est bornée
- f est localement intégrable
- pour $\sigma > 0$, $z \mapsto g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$ s'étend holomorphiquement à $\{z \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 0\}$.

Alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = g(0).$$

Corollaire

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Idée de la preuve

Considérer $\int_0^{+\infty} \big(\vartheta(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t} - 1\big)\,\mathrm{d}t$.

Introduction

- Énoncé du théorème
- Historique
- Conventions

La démonstration de Zagier

- Produit eulérien
- Prolongement méromorphe de ζ
- Majoration de ϑ
- Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
- Une nouvelle expression de Φ
- Le théorème analytique
- Équivalent de ϑ
- Preuve du théorème

Équivalent de ϑ

Proposition décisive : Équivalent de ϑ

On a l'équivalent $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Preuve

- Pour $\varepsilon > 0$: $\eta(x) := \displaystyle\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$
- $\eta(x) = \displaystyle\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, \mathrm{d}t \geqslant \varepsilon x \frac{\vartheta(x)}{(1+\varepsilon)^2 x^2} - \ln(1+\varepsilon).$

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\left(\eta(x) + \ln(1+\varepsilon)\right) = o_\varepsilon(1) + \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon).$$

Donc

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon).$$

Et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant 1.$$

Équivalent de ϑ

- Pour $\varepsilon > 0$: $\gamma(x) := \displaystyle\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$
- $\gamma(x) = \displaystyle\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon x \frac{\vartheta(x)}{(1-\varepsilon)^2 x^2} + \ln(1-\varepsilon).$

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\gamma(x) - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 = o_\varepsilon(1) - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 \leqslant \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Alors

$$-\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Pour ε arbitrairement petit, on a : $\quad 1 \leqslant \displaystyle\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}.$

- On a montré : $\quad 1 \leqslant \displaystyle\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant 1.$

  Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$ i.e. $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x.$

Introduction
- Énoncé du théorème
- Historique
- Conventions

La démonstration de Zagier
- Produit eulérien
- Prolongement méromorphe de ζ
- Majoration de ϑ
- Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ
- Une nouvelle expression de Φ
- Le théorème analytique
- Équivalent de ϑ
- Preuve du théorème

Preuve du théorème

Théorème des nombres premiers faible

On a la relation de comparaison $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

Preuve

Soit $x > 1$, $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &\geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon} \leqslant p \leqslant x} \ln p \geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon} \leqslant p \leqslant x} \ln\left(x^{1-\varepsilon}\right) \\
&\geqslant (1-\varepsilon)\ln x\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\varepsilon}\right)\right) \\
&\geqslant (1-\varepsilon)\ln x\left(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\right) \quad \text{car} \quad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \leqslant x \\
&\geqslant (1-\varepsilon)\ln x\left(\pi(x) + o\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right) \quad \text{car} \quad \frac{\ln(x)}{x^{\varepsilon}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\frac{\vartheta(x)}{\ln x} \geqslant (1-\varepsilon)\pi(x) + o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Or $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. Ce qui fournit que $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

Preuve du théorème

Théorème des nombres premiers

On a l'équivalent
$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Preuve

$$\begin{aligned}\pi(x)\ln x - \vartheta(x) &= \sum_{p\leqslant x} \ln x - \sum_{p\leqslant x} \ln p = \sum_{p\leqslant x} \ln\left(\frac{x}{p}\right) \\ &= \sum_{p\leqslant x} \int_p^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_2^x \sum_{p\leqslant t} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :
$$\pi(x)\ln x - \vartheta(x) = O\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

Et par une intégration par parties on obtient :
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right).$$

Preuve du théorème

Théorème des nombres premiers

On a l'équivalent
$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Preuve

$$\pi(x)\ln x - \vartheta(x) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \text{d'où } \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Le fait que $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ conclut.

Remarques

- On a l'estimation plus précise $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{li}(x)$.
- Théorème des nombres premiers fort (La Vallée Poussin) :
$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \exp\left(-\sqrt{\frac{\ln x}{2V}}\right)\right) \quad \text{avec } V \approx 34,5.$$
- L'hypothèse de Riemann équivaut à une majoration beaucoup plus serrée de l'erreur dans l'approximation de $\pi(x)$: $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$ (Helge von Koch).