Soutenance de stage - 30 août 2022

Jérémy Bettinger

Le problème des moments

Sous la direction de Nicolas Juillet à l'IRIMAS à Mulhouse

Sommaire

Introduction

Qu'est-ce que le problème des moments ?

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $(m_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $m_0 = 1$. Résoudre le problème des moments sur I consiste à trouver des conditions d'existence et d'unicité d'une mesure borélienne positive μ portée par I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m_n = \int x^n \, \mathrm{d}\mu(x).$$

La normalisation $m_0 = 1$ impose à μ d'être une mesure de probabilité sur I.

Ainsi, cela revient à chercher des conditions d'existence, et d'unicité en loi, d'une variable aléatoire X presque sûrement à valeurs dans I, telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $m_n = \mathbb{E}(X^n)$.

Qu'est-ce que le problème des moments ?

On distingue le plus souvent le problème des moments sur trois intervalles I différents :

- Le cas où $I = [0, 1]$ est le problème des moments de Hausdorff
- Le cas où $I = \mathbb{R}_+$ est le problème des moments de Stieltjes.
- Le cas où $I = \mathbb{R}$ est le problème des moments de Hamburger.

Ces derniers occupent les mathématiciens depuis le XX$^{\text{e}}$ siècle.

Introduction

Conventions

- μ désigne une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.
- n désigne un entier naturel.
- On définit les moments et les moments absolus de μ respectivement par :

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \mu_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^n \,\mathrm{d}\mu(x).$$

- On notera φ la fonction caractéristique de la v.a. en question.

Dans cette présentation, nous allons nous poser la question de l'unicité des lois ayant pour moments des réels donnés.

Le problème des moments

Exemple fondamental

Définition

Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors la variable aléatoire e^N suit la loi Log-Normale et est à densité $x \mapsto f(x) := \mathrm{e}^{-(\ln x)^2/2} / (\sqrt{2\pi}x)\ \mathbb{1}_{x>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exemple fondamental

En toute généralité, les moments ne caractérisent pas la loi.
La loi Log-Normale fournit un tel exemple.

Démonstration

Notons f la fonction de densité de la loi Log-Normale. Nous allons montrer que la loi à densité $x \mapsto g(x) := f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))$ a les mêmes moments que f mais n'est pas égale à f.
Montrons alors qu'elles ont les mêmes moments et que g est bien une densité.

Exemple fondamental

Démonstration

Soit $k \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable $y = \ln(x)$ pour calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^k f(x) \sin(2\pi \ln(x))\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ky}\, \mathrm{e}^{-y^2/2} \sin(2\pi y)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\mathrm{e}^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(y-k)^2/2} \sin(2\pi y)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\mathrm{e}^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \sin(2\pi u)\, \mathrm{d}u \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f et g ont les mêmes moments.

De plus, $g : x \mapsto f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))$ est bien une densité.

Ainsi, les moments ne caractérisent pas la loi.

Régularité de la fonction caractéristique

Proposition

Si $\mathbb{E}(|X|^n)$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction caractéristique de X notée φ est de classe $\mathcal{C}^n$, de dérivée k-ième : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k \mathrm{e}^{itX})$ et $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$.

Démonstration

C'est une application du théorème de régularité sous l'intégrale. Notons pour $x, t \in \mathbb{R}$: $f(x,t) = \mathrm{e}^{itx}$. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \leqslant n-1,\ x \mapsto \partial_t^k f(x,t) = (ix)^k \mathrm{e}^{itx} \in L^1(\mathrm{d}\mu)$.
- $\forall x, t \in \mathbb{R},\ |\partial_t^n f(x,t)| = |(ix)^n \mathrm{e}^{itx}| = |x|^n \in L^1(\mathrm{d}\mu)$ par hypothèse (majorant indépendant en t).

Alors $\varphi : t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}\mu(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.

De plus on a l'égalité :

$$\forall k \leqslant n,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}\mu(x) = i^k \mathbb{E}(X^k \mathrm{e}^{itX}).$$

Critère des moments de Fourier

Théorème (Critère des moments de Fourier)

Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant tous ses moments absolus μ_n finis alors si la quantité $\overline{\lim_n} (\mu_n)^{1/n}/n$ est finie, μ est déterminée par ses moments.

Remarque

On peut uniquement supposer $\overline{\lim_n} (\mu_{2n})^{1/2n}/(2n)$ fini.

Remarque

Dans la preuve, on montre que si la fonction caractéristique d'une v.a. est analytique alors cette v.a. est caractérisée par ses moments.

Conditions de Fourier équivalentes

Proposition (Conditions de Fourier équivalentes)

Soit μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant tous ses moments absolus μ_n finis alors si une des conditions équivalentes

1. La quantité $R^{-1} := \overline{\lim_n} \left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{1/n}$ est finie.
2. La quantité $r := \overline{\lim_n} \frac{(\mu_n)^{1/n}}{n}$ est finie.

est vraie alors μ est déterminée par ses moments.

Dans ce cas, la fonction caractéristique φ est analytique sur $\mathbb{R}$ et particulier au voisinage de 0 :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad \varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

Condition suffisante d'exponentielle intégrabilité

Théorème

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\alpha|X|})$ est fini alors μ est déterminée par ses moments.

Résumé :

- $\overline{\lim_n} \left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{1/n} < +\infty \quad \text{ou} \quad \overline{\lim_n} \frac{(\mu_n)^{1/n}}{n} < +\infty.$
- φ est analytique.
- $\exists \alpha > 0,\ \mathbb{E}(e^{\alpha|X|}) < +\infty.$

Loi Log-Normale

Le cas de la loi Log-Normale

La fonction caractérisque d'une variable aléatoire suivant la loi Log-Normale n'est pas analytique.

Démonstration

Supposons par l'absurde que φ est analytique. Or d'après les remarques précédentes, la loi de X serait caractérisée par ses moments, ce qui n'est pas le cas d'après l'exemple fondamental. Par conséquent φ n'est pas analytique.

Remarque ($\mathcal{C}^\infty$ n'implique pas analytique)

Cet exemple donne une illustration d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas analytique. En effet, par ce qui précède, on peut donc dire que

$$\varphi : t \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{itx} \frac{\mathrm{e}^{-\ln(x)^2}}{\sqrt{2\pi} x} \, \mathrm{d}x$$

n'est pas analytique, bien que de classe $\mathcal{C}^\infty$, étant donné qu'une loi Log-Normale admet des moments absolus à tout ordre.

La loi Normale

Proposition

La loi Normale est caractérisée par ses moments.

Démonstration

Calculons les moments absolus par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \int_{\mathbb{R}} |x|^n \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^n \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-2x^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2(n-1)x^{n-2}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2(n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = (n-1)\mu_{n-2}.
\end{aligned}$$

Si n est pair : $\mu_n = (n-1)\times(n-3)\times\ldots\times\mu_0 \leqslant C_1\,(n!)$ où $C_1 > 0$.
Si n est impair : $\mu_n = (n-1)\times(n-3)\times\ldots\times 2\times\mu_1 \leqslant C_2\,(n!)$ où $C_2 > 0$. Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que $\mu_n \leqslant C\,(n!)$.
Donc $\overline{\lim_n}\,(\mu_n/n!)^{1/n} \leqslant \overline{\lim_n}\,C^{1/n} < +\infty$. Le critère de Fourier conclut.

La loi Gamma

Définition

On définit la densité d'une loi Gamma de paramètres $\lambda > 0$, $a > 0$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

Lemme

Les moments d'une loi Gamma sont donnés par :
$m_n = a \times (a+1) \times \cdots \times (a+n-1)/\lambda^n$.

Démonstration

Pour calculer m_n, effectuons le changement de variable $y = \lambda x$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1+n} \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{a-1+n} \mathrm{e}^{-y} \, \frac{\mathrm{d}y}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\lambda^n} \int_0^{+\infty} y^{a-1+n} \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a) \, \lambda^n} = \frac{a \times (a+1) \times \cdots \times (a+n-1)}{\lambda^n}.
\end{aligned}$$

La loi Gamma

Proposition

La loi Gamma est caractérisée par ses moments.

Démonstration

Utilisons l'expression explicite de m_n.
Tout d'abord les quantités m_n et μ_n coïncident puisque X est à support dans $\mathbb{R}_+$.
Remarquons que pour n grand on a : $a \leqslant n$, on a ainsi pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et n grand : $a+k \leqslant 2n$.
Cela fournit alors pour n grand :

$$m_n = \frac{1}{\lambda^n} \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) \leqslant \frac{(2n)^n}{\lambda^n} = \left(\frac{2n}{\lambda}\right)^n$$

ce qui fournit $\overline{\lim_n} \dfrac{(\mu_n)^{1/n}}{n} \leqslant \overline{\lim_n} \dfrac{2n}{\lambda n} = \dfrac{2}{\lambda} < +\infty$.
D'après le critère de Fourier, la loi Gamma est caractérisée par ses moments.

La loi Gamma

Remarque

Comme la loi Gamma est caractérisée par ses moments, c'est en particulier le cas pour les lois exponentielles et du chi-deux car $\varepsilon(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$ et $\chi^2(k) = \Gamma(1/2, k/2)$.

En effet, la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$$

et celle du chi-deux à k degrés de liberté est :

$$x \mapsto \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \, \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

La loi Géométrique

Proposition

La loi Géométrique est caractérisée par ses moments.

Démonstration

Considérons une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$.
Cherchons s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha|X|})$ soit fini.

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha|X|}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha k}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\alpha}(1-p)\right)^{k}.$$

Le membre de droite est fini si et seulement si $\mathrm{e}^{\alpha}(1-p) < 1$, ce qui est le cas pour $\alpha \in]0, -\ln(1-p)[$.
Prenons par exemple $\alpha = -\ln(1-p)/2 > 0$.
La condition suffisante d'exponentielle intégrabilité conclut.

La loi de Poisson

Proposition

La loi de Poisson est caractérisée par ses moments.

Démonstration

Considérons une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cherchons s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha|X|})$ soit fini.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha|X|}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha k} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha}\lambda)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\alpha}\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\alpha}-1)} < +\infty.\end{aligned}$$

Prenons par exemple $\alpha = 1$.
La condition suffisante d'exponentielle intégrabilité conclut.