

Leçon 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Bibliographie

Références : BERHUY - Le grand Combat // ULMER - Théorie des groupes // ROMBALDI - Algèbre et géométrie // CALDERO - PERONNIER - Voyage en algèbre

1. Groupe opérant sur un ensemble

1.1. Action de groupe

Berhuy / Ulmer

1. DÉFINITION. Action de groupe
2. PROPOSITION. Morphisme structurel
3. EXEMPLE. Exemples
4. DÉFINITION. Transitivité et fidèlement
5. EXEMPLE. Exemples
6. DÉFINITION. Stabilisateur
7. REMARQUE. Le noyau du morphisme est l'intersection des stabilisateurs
8. DÉFINITION. Orbite
9. EXEMPLE. Transitive \Leftrightarrow une seule orbite
10. DÉFINITION. point fixe
11. REMARQUE. Point fixe et orbite

1.2. Relations orbites/stabilisateurs

Berhuy / Ulmer

12. THÉORÈME. Formule des classes
13. EXEMPLE. Exos du Ulmer
14. PROPOSITION. Relation orbite/stabilisateur
15. DÉFINITION. Point fixe
16. THÉORÈME. Burnside

2. Groupe opérant sur des groupes

2.1. Premières conséquences

Ulmer / Berhuy

17. DÉFINITION. Translation à gauche
18. THÉORÈME. Cayley
19. PROPOSITION. Noyau du morphisme
20. EXEMPLE. Quaternions
21. EXEMPLE. De l'action menant à Fermat et Cauchy
22. APPLICATION. Théorème de Fermat
23. APPLICATION. Théorème de Cauchy

2.2. Action par conjugaison

24. DÉFINITION. Action par conjugaison et orbite
25. EXEMPLE. Classes de conjugaisons des permutations

26. LEMME. Caractérisation du centre
27. EXEMPLE. Centralisateur du Diédral, centralisateur des permutations
28. REMARQUE. Description de l'action par conjugaison du groupe sur l'ensemble de ses sous-groupes
29. DÉFINITION. Normalisateur
30. EXEMPLE. Espace vectoriel
31. PROPOSITION. Les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués
32. APPLICATION. Sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$

2.3. Les p -groupes

Ulmer

33. DÉFINITION. p -groupe
34. EXEMPLE. exemples
35. PROPOSITION. Corollaire de l'équation aux classes
36. THÉORÈME. Cauchy
37. PROPOSITION. Centre d'un p -groupe
38. PROPOSITION. p^2 implique groupe abélien

3. Actions de groupes en algèbre linéaire et géométrie

3.1. Algèbre linéaire

Rombaldi

39. DÉFINITION. Action par translation
40. PROPOSITION. Lien avec la décomposition polaire
41. PROPOSITION. Pivot de Gauss
42. DÉFINITION. Action par conjugaison
43. THÉORÈME. Matrice diagonalisable ssi l'orbite est fermée
44. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Dénombrement des matrices diagonalisables (Voyage en algèbre)

3.2. Géométrie

Ulmer

45. DÉFINITION. Groupe diédral
46. PROPOSITION. Engendré par r et n
47. THÉORÈME. Classes de conjugaison + centre
48. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Isométries du cube (Voyage en Algèbre)