# **Leçon 108.** Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Références : ROMBALDI - Algèbre et géométrie // ULMER - Théorie des groupes // PERRIN - Cours d'algèbre

### 1. Partie génératrice

Rombaldi

1. Définition. Sous-groupe engendré
2. Proposition. C'est l'intersection des sous-groupes contenant la partie
3. Exemple. Groupe dérivée engendré par les commutateurs
4. Définition. Type fini
5. Exemple. $\mathbf{Z}^n =< (1,\dots,0),\dots,(0,\dots,1) >$, groupe diédral
6. Contre-exemple. $(\mathbf{Z}[X],+)$ engendré par $1,X,\dots,X^n,\dots$
7. Définition. Partie génératrice d'un groupe
8. Remarque. Tout groupe possède au moins une partie génératrice (lui-même)

### 2. Groupes abéliens

#### 2.1. Groupes monogènes, cyliques

Rombaldi

9. Définition. Groupe monogène, cyclique
10. Remarque. Monogène => abélien
11. Exemple. $\mathbf{Z}$ est monogène engendré par 1, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est cyclique engendré par $\overline{1}$, le groupe des racines $n$-ièmes de l'unité est cyclique, engendré par les racines primitives
12. Théorème. Structure des groupes monogènes/cycliques
13. Exemple. Les racines $n$-ièmes de l'unité sont isomorphes à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par l'isomorphisme de l'exponentielle.
14. Théorème. Générateurs d'un groupe cyclique
15. Exemple. Générateurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, tout élément d'un groupe de cardinal premier est génératuer.
16. Définition. Indicatrice d'Euler
17. Théorème. Si $n \geqslant 2$ est tel que $n \wedge \varphi(n) = 1$, alors tout groupe commutatif d'ordre $n$ est cyclique.

#### 2.2. Groupes abéliens de type finis

Ulmer

18. Définition. Groupe de type fini
19. Remarque. Un groupe monogène est de type fini
20. Contre-exemple. $\mathbf{Z}$ est de type fini, mais pas fini
21. Définition. Lien morphisme et être générateur
22. Définition. Groupe de torsion
23. Exemple. $(\mathbf{Q},+)$
24. Proposition. Une groupe abélien de type fini est fini si et seulement si $A = A_{\text{tors}}$.
25. Théorème. Structure des groupes abéliens finis
26. Exemple. Description des groupes d'ordre 600
27. Théorème. Structure des groupes abéliens de type fini

### 3. Groupe symétrique

#### 3.1. Générateurs de $\mathcal{S}_n$

Rombaldi

28. Définition. Définition de $\mathcal{S}_n$
29. Théorème. $\mathcal{S}_n$ est engendré par les cycles, les transpositions, les transpositions de la forme $(1\ i)$ et les transpositions de la forme $(i\ i+1)$ et par $(1\ 2)(1,\dots,n)$ et $(1\ 2)(2,\dots,n)$
30. Exemple. Décomposition de $\sigma$ en produit de transpositions

#### 3.2. Le groupe alterné

Ulmer

31. Définition. Groupe alterné
32. Théorème. $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, notamment ceux de la forme $(1,i,j)$
33. Exemple.
34. Théorème. DEVELOPPEMENT $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n > 4$. (Perrin)

### 4. Groupe linéaire

#### 4.1. GL(E) et SL(E)

Perrin

35. Définition. GL(E)
36. Définition. Dilatation
37. Définition. Transvection
38. Théorème. Les transvections générateurs de SL(E)
39. Corollaire. Les transvections et dilatations générateurs de GL(E)
40. Proposition. Les transvections sont conjuguées
41. Application. Simplicité de $PSL_n(K)$

#### 4.2. Groupe orthogonal

Rombaldi

On se place cette fois dans le cadre d'un espace euclidien DEVELOPPEMENT Générateurs de O(E) et SO(E) (Berhuy)