# **Leçon 125.** Extensions de corps. Exemples et applications.

Références : PERRIN - Cours d'algèbre // ULMER - Anneaux, corps, résultant // ISENMANN-PECATTE - L'oral à l'agrégation

## 1. Degré d'une extension

### 1.1. Notion de degré

Perrin / Ulmer

1. Définition. Extension de corps
2. Exemple. $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, exemple des sous-corps premiers
3. Remarque. Un corps et un sous-corps ont même caractéristiques
4. Remarque. Notion d'espace vectoriel
5. Définition. Degré d'une extension
6. Exemple. $\mathbf{C}$ est une extension de degré 2 de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}(T)$ est de degré infini
7. Théorème. Base télescopique
8. Corollaire. Multiplicativité du degré
9. Définition. Extension monogène
10. Remarque. Pas coïncidence

### 1.2. Extensions algébriques

Ulmer pour ce qui est transcendants, Perrin le reste

11. Définition. Elément algébrique et transcendant
12. Définition. Polynôme minimal
13. Exemple. $e, \pi$ (Lindemann) sur $\mathbf{Q}$ transcendants, $T$ dans $K(T)$ aussi, mais $\sqrt{2}$,$i$,$^3\sqrt{2}$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}$.
14. Théorème. Gelfond-Schneider
15. Proposition. Si $\alpha$ transcendant, isomorphismes logiques
16. Théorème. Caractérisation de l'algébricité
17. Remarque. Un polynôme minimal est irréductible et l'extension est de degré le degré du polynôme minimal.
18. Définition. Extensions finie et algébrique
19. Remarque. Extension finie implique algébrique
20. Contre-exemple. Algébrique n'implique pas finie : exemple de la clôture algébrique de $Q$.
21. Théorème. Ensemble des algébriques est un corps
22. Remarque. Calcul d'un polynôme annulateur de la somme, du produit : exemple de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (Ulmer)
23. Exemple. Calcul de degrés d'extensions avec le théorème de la base télescopique, application à l'irréductibilité d'un polynôme (Ulmer)

## 2. Racines de polynômes

### 2.1. Corps de rupture et de décomposition

Perrin

24. Définition. Corps de rupture
25. Remarque. $K[a]$ est un corps de rupture du polynôme minimal de $a$
26. Exemple. $\mathbf{C} \sim \mathbf{R}[x]/(X^2+1)$, etc.
27. Théorème. Il existe un corps de rupture
28. Définition. Corps de décomposition
29. Remarque. Le corps de décomposition est un sur-corps des corps de rupture
30. Exemple. Perrin
31. Théorème. Il existe un unique corps de décomposition
32. Proposition. Permutation des racines par le groupe de Galois (Ulmer)

### 2.2. Clôture algébrique

Ulmer

33. Définition. Algébriquement clos
34. Proposition. Caractérisation d'algébriquement clos
35. Exemple. $\mathbf{C}$ d'Alembert Gauss, $\mathbf{R}$ ne l'est pas
36. Théorème. Existence d'une extension algébriquement close
37. Définition. Clôture algébrique
38. Exemple. Clôture $\mathscr{F}_p$
39. Contre-exemple. $\mathbf{C}$ n'est pas une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$
40. Théorème. Clôture algébrique
41. Contre-exemple. Si pas algébriquement clos : l'ensemble des $x$ dans $\mathbf{R}$ qui sont algébriqument clos
42. Corollaire. Unicité à isomorphismes
43. Exemple. $\mathbf{C}$
44. Contre-exemple. Un corps fini n'est jamais algébriquement clos
45. Application. DEVELOPPEMENT Réciprocité quadratique via le résultant (Isenmann-Pecatte)

### 2.3. Le cas des corps finis

Ulmer

46. Théorème. Existence et unicité du corps fini
47. Proposition. La clotûre algébrique est exactement le corps de décomposition d'un polynôme particulier
48. Proposition. Conditions de sous-corps entre les corps finis
49. Exemple. Dessin d'une tour d'extention en annexe
50. Corollaire. Il existe un polynôme irréductible de degré $m$
51. Corollaire. Qu'un corps de rupture est un corps de décomposition
52. Exemple. Recherche de factorisation

## 3. Utilisation en algèbre

### 3.1. Les polynômes cyclotomiques

DEVELOPPEMENT Irréductibilité des polynômes cyclotomiques + application en théorie des corps (Perrin)

### 3.2. Construction à la règle et au compas

DEVELOPPEMENT Théorème de Gauss-Wantzel (constructibilité de polygônes réguliers) (Isenmann-Pecatte)

## Bibliographie