Leçon 204. Connexité. Exemples et applications.

Références : GOURDON - Analyse // QUEFFELEC - Topologie // AMAR-MATHERON - Analyse complexe // CALDERO-GERMONI Histoires hédonistes de groupes et géométries (abrégé en H2G2) // ZAVIDOVIQUE - Un max de maths // GONNORD-TOSEL Calcul différentiel

1. Connexité

Cadre : Espace métrique (E,d).

1.1. Propriétés générales

Gourdon

1. Définition. Connexité (avec l'équivalence des définitions)
2. Exemple. $\mathbf{R}$ est connexe, $\mathbf{Z}$ n'est pas connexe.
3. Proposition. L'image continue d'un connexe est connexe.
4. Contre-exemple. C'est faux pour l'image réciproque : $\sin^{-1}(\mathbf{R}_+)$
5. Théorème. Caractérisation des espaces connexes par une fonction continue vers $\{0,1\}$.
6. Proposition. Si A connexe alors $A \subset B \subset \overline{A}$ implique B connexe
7. Remarque. En particulier, si A connexe alors son adhérence est connexe.
8. Contre-exemple. C'est faux pour l'intérieur (“sablier”)
9. Proposition. Union de connexes connectés 2 à 2
10. Contre-exemple. Pas vrai si pas connectés 0 et 1, intersection de connexe n'est pas connexe (deux arcs de cercle)

1.2. Connexité par arcs

Gourdon

11. Définition. Connexité par arcs
12. Proposition. La connexité par arcs implique la connexité
13. Contre-exemple. Adhérence du graphes $sin(1/x)$
14. Proposition. Dans un ouvert d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, une partie connexe est connexe par arcs (Gourdon)

1.3. Le cas réel

Gourdon

15. Théorème. Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$
16. Remarque. Coïncide avec l'idée d'union d'intervalles qui doivent être connectés pour conserver la connexité
17. Corollaire. Théorème des valeurs intermédiaires
18. Contre-exemple. Ca ne caractérise pas les applications continues : $x \mapsto \sin(1/x)$ (Risque de parler du théorème de Darboux à l'oral : généralisation)
19. Application. Points antipodaux de la sphère ayant la même image par une application continue sur la sphère
20. Application. Théorème de Brouwer en dimension 1
21. Théorème. DEVELOPPEMENT Théorème de Brouwer en dimension n (Gonnord et Tosel)

2. Passage du local vers le global

2.1. Composantes connexes

Queffelec

22. Définition. Composante connexe
23. Proposition. Fermeture et partition des composantes connexes
24. Définition. Définition localement constante
25. Proposition. Localement constant implique constant sur chaque composante connexe
26. Application. Théorème d'unicité globale de Cauchy-Lipschitz

2.2. Utilisation de la différentiabilité

27. Proposition. fonction dont la différentielle est nulle est constante sur ses composantes connexes
28. Théorème. Résultat analogue en distributions
29. Application. Résolution simple d'équation différentielles dans les distributions

2.3. Holomorphie

Amar et Matheron

30. Proposition. Sur un connexe, une fonction holomorphe non nulle ne peut avoir toutes ses dérivées nulles en un même point.
31. Théorème. Principe des zéros isolés
32. Théorème. Principe du prolongement analytique
33. Application. Prolongement de la fonction ζ
34. Application. Calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne
35. Proposition. Principe du maximum
36. Application. Lemme de Schwarz
37. Application. Automorphismes du disque

3. Connexité des espaces matriciels

Queffelec

38. Proposition. $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe, $GL_n(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes qui sont $\det^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ et $\det^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$
39. Théorème. $SL_n(\mathbf{R}), SL_n(\mathbf{C}), U_n(\mathbf{C}), SU_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ sont connexes.
40. Application. Le groupe $SO_3(\mathbf{R})$ est simple. (H2G2)
41. Théorème. $\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$
42. Corollaire. DEVELOPPEMENT L'exponentielle de matrices complexes est surjective (Zavidovique)
43. Corollaire. (suite DEVELOPPEMENT) L'exponentielle de matrice réelle a pour image les carrés de matrices.

Bibliographie