

## Leçon 220. Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Références : BERTHELIN - Equations différentielles // DEMAILLY - Analyse numérique et équations différentielles // ZUILY-QUEFFELEC - Analyse pour l'agrégation

### 1. Existence et unicité des solutions

#### 1.1. Position du problème

Berthelin

1. DÉFINITION. Définition équa. diff.
2. DÉFINITION. Solution
3. PROPOSITION. Se ramener au cas  $n = 1$
4. EXEMPLE. de ramassage à l'ordre 1
5. EXEMPLE.  $y' = y$  : solution
6. DÉFINITION. Problème de Cauchy
7. EXEMPLE. Problème de Cauchy
8. PROPOSITION. Régularité de la solution
9. PROPOSITION. Formulation intégrale
10. DÉFINITION. Prolongement
11. CONTRE-EXEMPLE. pas forcément unique
12. DÉFINITION. Solution maximale, solution globale
13. CONTRE-EXEMPLE.  $y^2$  solution maximale mais pas globale

#### 1.2. Existence et unicité

Berthelin

14. LEMME. Lemme de Gronwall
15. APPLICATION. Petite application + Inégalité de stabilité
16. THÉORÈME. Cauchy-Lipschitz global
17. COROLLAIRE. Cauchy-Lipschitz local
18. EXEMPLE. valeur absolue pour Cauchy-Lipschitz non  $C^1$ ,  $y' = y^2$  pour Cauchy-lipschitz (Exos)
19. THÉORÈME. Cauchy-Arzela-Peano
20. EXEMPLE.  $\sqrt{\quad}$
21. THÉORÈME. Théorèmes des bords
22. APPLICATION. Si bornée et localement lipschitz alors solutions globales
23. EXEMPLE.  $y' = \sin(y)$

Transition : maintenant qu'on dispose d'outils assurant l'existence/l'unicité des solutions de nos équations, nous nous intéressons à leur résolution explicite.

### 2. Résolution explicite

#### 2.1. Equations historiques

Berthelin

24. EXEMPLE. Variables séparables
25. EXEMPLE. Equations homogènes

26. EXEMPLE. Euler (exo)
27. EXEMPLE. Bernoulli exemple
28. EXEMPLE. Riccati théorique
29. EXEMPLE. Clairaut
30. EXEMPLE. Développement en séries entières : Legendre et Bessel
31. EXEMPLE. Equation de Newton

#### 2.2. Approximation numérique

Demailly

32. DÉFINITION. Méthode Euler explicite
  33. PROPOSITION. La méthode est convergente
  34. REMARQUE. Proche de la solution par rapport à la constante de Lipschitz module de continuité
  35. REMARQUE. Preuve Cauchy-Lipschitz et Cauchy-Arzela Peano
- Transition : Souvent on ne peut pas trouver de solutions explicites : on se ramène alors à une étude qualitative qui permet de dégager des propriétés et des comportements des solutions.

### 3. Etude qualitative des équations autonomes

#### 3.1. Portrait de phase

Berthelin

36. DÉFINITION. Equation différentielle autonome
37. DÉFINITION. Courbe de niveau
38. DÉFINITION. Isoclines et point stationnaire
39. EXEMPLE. Isoclines du Berthelin, dessins en exos
40. REMARQUE. Points stationnaires sont les solutions constantes du systèmes
41. EXEMPLE. DEVELOPPEMENT Lotka-Volterra (pas vraiment de réf, un pdf du [couteau suisse](#))

#### 3.2. Stabilité des solutions

Demailly

42. DÉFINITION. Stabilité, attractivité, asymptotiquement stable
43. THÉORÈME. Stabilité et asymptotique stabilité des systèmes linéaires
44. THÉORÈME. Avec la Jacobienne
45. EXEMPLE. Exos avec stabilité Berthelin

#### 3.3. Une étude de bornitude de solutions

Zuily Queffelec

46. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Equation de Hill-Matthieu