Leçon 223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Références : DANTZER - Analyse et probabilités // ROUVIERE - Petit guide du calcul différentiel // DEMAILLY Analyse numérique et équations différentielles // ROMBALDI - Elements d'analyse réelle

1. Convergence d'une série numérique

1.1. Limite

Dantzer

1. Définition. Convergence et divergence d'une suite
2. Théorème. Unicité de la limite
3. Exemple. $1/n$ tend vers 0, une suite à valeurs entières est convergente ssi elle est stationnaire (perso)
4. Proposition. Une suite convergente est bornée
5. Contre-exemple. $(-1)^n$ (perso)
6. Définition. Suite de Cauchy
7. Théorème. Convergence ssi de Cauchy
8. Application. Une série absolument convergente est convergente
9. Théorème. L'ensembles de suites convergentes est une algèbre et l'application qui à une suite associe sa limite est un morphisme d'algèbre + limite de l'inverse
10. Remarque. Convergente + divergente = divergente, mais sommes de divergentes on peut rien dire
11. Théorème. Théorème des gendarmes
12. Exemple. $\cos(n)/n$ tend vers 0
13. Théorème. Cesàro
14. Contre-exemple. la convergence en moyenne de Cesaro n'implique pas la convegence : $\cos(n\theta)$

Transition : On s'intéresse aux suites monotones qui ont des critères de convergences propres

1.2. Suites monotones

Dantzer / Rombaldi Dantzer (Suite numérique)

15. Définition. Suite monotone
16. Proposition. Convergence monotone
17. Exemple. Série des $1/n^2$ convergente
18. Proposition. Suites adjacentes
19. Application. Critère de Leibniz (Trouver référence)
20. Proposition. La borne sup est atteinte de manière croissante
21. Application. La borne sup et la borne inf sont dans l'adhérence de la partie
22. Définition. lim sup et lim inf (BORNEE)

Transition : les suites des sup et des infs sont croissantes/décroissantes, donc convergente si bornées ou divergente vers l'infini. On peut définir lim sup et lim inf sont donc toujours bien définies, et moralement la suite va repasser une infinité de fois par le sup et l'inf

1.3. Valeurs d'adhérence

Dantzer

23. Définition. Valeur d'adhérence (existe d'une sous-suite qui converge vers)
24. Exemple. $(-1)^n$ a deux valeurs d'adhérences 1 et -1.
25. Proposition. L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé
26. Proposition. lim inf et lim sup sont les plus petite et plus grande valeurs d'adhérences
27. Théorème. Toute suite convergente n'admet qu'une seule valeur d'adhérence
28. Contre-exemple. La réciproque est fausse en toute généralité $(n(1+(-1)^n))_n$
29. Théorème. Bolzano-Weierstrass
30. Corollaire. Une suite réelle est convergente ssi elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence
31. Application. Caractérisation de la convergence par lim sup et lim inf
32. Théorème. Une suite d'un compact de $\mathbf{C}$

Transition : on a donc vu les valeurs qu'une suite peut approcher, qu'il s'agisse de la limite ou des valeurs d'adhérence. Une question que l'on peut se poser désormais : de quelle manière les approche-t-elle ? A quelle vitesse ?

2. Comportement asymptotique

2.1. Comparaison asymptotique

33. Définition. O, o, $\sim$
34. Proposition. convergence implique convergence pour o, et équivalence alors sont de même natures
35. Remarque. O(1) t'es bornée, donc pas convergente (ex $(-1)^n$), o(1) = suites convergentes vers 0
36. Corollaire. Une suite converge vers l ssi $u_n \sim l$.
37. Remarque. On ne peut pas sommer des équivalents, sauf s'ils sont de même signes
38. Application. Développement limité H_n

Transition : vitesse de convergence

2.2. Vitesse de convergence

Dantzer (chapitre 12)

39. Définition. Vitesse de convergence
40. Exemple. $1/n^k$, q^n
41. Application. vitesse de convergence du problème de Bâle
42. Définition. défubutuib de vitesse plus élevée
43. Définition. méthode d'accélération de Richardson
44. Proposition. théorème
45. Application. approximation de π

Transition : maintenant que l'on a étudié des critères de convergences et de détermination de limite, ainsi que de vitesse de convergence, on se concentre sur un exemple fondamental : $f(u_n) = u_{n+1}$. Ces suites apparaissent naturellement dans des problèmes d'approximations numériques

3. Le cas des suites récurrentes d'ordre 1

3.1. Point fixe

Rombaldi / Demailly

46. Définition. Suite récurrente d'ordre 1 R
47. Exemple. suite arithmético géométrique R
48. Proposition. Lien entre limite et point fixe R
49. Définition. attractif / répulsif D
50. Remarque. on peut rien dire pour $f' = 1$ D
51. Application. Résolution d'équation D
52. Proposition. Vitesse de convergence

3.2. Méthode de Newton

Rouvière / Demailly

53. Théorème. DEVELOPPEMENT Méthode de Newton (Rouvière)
54. Application. Puissance p-ième
55. Application. Dunford effectif
56. Remarque. Généralisation Newton-Raphson