Leçon 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références : GOURDON - Analyse // ROMBALDI - Elements d'analyse réelles // ROUVIERE - Petit guide du calcul différentiel // DEMAILLY - Analyse numérique et équations différentielles

1. Définitions et propriétés

1. Définition. Suite récurrente (Gourdon)

1.1. Suite récurrente d'ordre 1 dans R

Rombaldi/Gourdon

2. Définition. Suite récurrente d'ordre 1
3. Proposition. Si u_n tend vers u et f est continue, alors $u = f(u)$
4. Contre-exemple. La seule continuité ne suffit pas : $f = -id$
5. Remarque. Il existe des fonctions discontinues pour lesquelles on a tout de même convergence de l'orbite : la fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$.
6. Exemple. Suite arithmétique (utilisée par exemple pour un débit ou un crédit régulier sur un compte en banque)
7. Exemple. Suite géométrique (utilisée par exemple pour une cumulation de promotions)
8. Application. Suite arithmético-géométrique (Mélange des deux, se résout grâce à une suite géométrique)

1.2. Monotonie de f

Rombaldi

9. Définition. Point fixe
10. Théorème. Si f croissante, alors elle admet au moins un point fixe.
11. Contre-exemple. Dans le cas d'une fonction décroissante, le résultat est faux
12. Théorème. Si f est croissante, alors u_n est monotone, croissante si $u_1 > u_0$ et décroissante sinon. De plus, si l'intervalle est borné, alors l'orbite converge, et si f est continue, l'orbite converge vers un point fixe de f.
13. Exemple. sin sur $[0,\pi/2]$ (rapport du jury)
14. Contre-exemple. C'est faux pour une fonction décroissante : exemple de $-id$.
15. Théorème. Si f est décroissante, alors f admet au plus un point fixe.
16. Remarque. Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante : on a tout de même des résultats de pour les sous-suites paires et impaires.

1.3. Suite vectorielle

Gourdon

17. Définition. Définition suite récurrente
18. Remarque. Transformation d'une suite récurrente d'ordre k en suite vectorielle récurrente d'ordre 1.
19. Définition. Suite récurrente linéaire
20. Exemple. Suite de Fibonnacci
21. Définition. Equation caractéristique
22. Proposition. Explicitation des suites possibles
23. Exemple. Suite de Fibonnacci

2. Autour du point fixe

2.1. Théorème de point fixe de Picard

Rombaldi

24. Théorème. Théorème du point fixe
25. Remarque. Un itéré seul peut être contractant, c'est suffisant
26. Contre-exemple. Hypothèses essentielles (mais peut affaiblir si compact)
27. Application. Théorème de Cauchy-Lipschitz
28. Application. Recherche de 0 de fonction via le point fixe $f(x) - x$

2.2. Classification des points fixes

Demailly

29. Définition. Classification des points fixe de $\mathbf{R}$
30. Théorème. DEVELOPPEMENT Classification des points fixes de $\mathbf{R}$ + dessin en annexe (Demailly)
31. Remarque. Un point fixe répulsif s'approche difficilement par itérations. Pour pallier ce problème, on peut localement changer f en f^{-1}.
32. Exemple. Résolution de l'équation $f(x) = x^3 - 4x + 1$

3. Approximation numérique

3.1. Dichotomie

3.2. Méthode de Newton

Rombaldi/Demailly/Rouvière

33. Définition. Méthode
34. Théorème. DEVELOPPEMENT Théorème de convergence (Rouvière)
35. Application. Approximation de la racine p-ième d'un réel > 0
36. Application. Méthode de Strassen-Zassenhauss dans le cadre de la factorisation de polynômes
37. Application. Décomposition de Dunford
38. Remarque. Méthode de Newton-Raphson (généralisation)

3.3. Méthode de Lagrange

Demailly/Rombaldi Intérêt : évite le calcul de la dérivée. Inconvénient : Demailly

39. Définition. Méthode de Lagrange
40. Théorème. Convergence de la méthode
41. Remarque. Vitesse de convergence moindre