Leçon 228. Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Références : ROMBALDI - Elements d'analyse réelle // HAUCHECORNE - Les contre-exemples en mathématiques // ZUILY-QUEFFELEC - Analyse pour l'agrégation // GOLSE - Distribution, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles // BECK-MALICK-PEYRE - Objectif Agreg (abrégé en OA) // RAMIS-DESCHAMPS-ODOUX - Tome 3 : Topologie et éléments d'analyse (abrégé en RDO3)

1. Continuité et dérivabilité

1.1. Continuité

Rombaldi

1. Définition. Continuité en un point, continuité
2. Exemple. sin est continue, $|.|$
3. Proposition. Bornitude
4. Remarque. L'ensemble des points de discontinuité peut être grand et la fonction peut être localement bornée partout : partie entière de $1/x$ en a un nombre $\mathbf{N}$
5. Théorème. Caractérisation séquentielle
6. Exemple. Fonction discontinue
7. Application. Caractérisation des points fixes
8. Corollaire. Principe de prolongement des identités
9. Contre-exemple. l'indicatrice de $\mathbf{Q}$ et 0

1.2. Dérivabilité

Rombaldi / Hauchecorne

10. Définition. Dérivabilité
11. Proposition. Dérivable => continue
12. Contre-exemple. $|x|$
13. Exemple. fonction dérivable en 0 mais discontinue ailleurs (propriété ponctuelle)
14. Théorème. Théorème fondamental de l'analyse
15. Définition. $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$
16. Exemple. $\exp \mathcal{C}^\infty$, $x^2\sin(1/x)$ est dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$

1.3. Stabilité de la régularité

Rombaldi

17. Proposition. dérivabilité n et $\mathcal{C}^n$ sont des algèbres, stable par composition (si elle existe), propriété de l'inverse
18. Proposition. Dérivation application linéaire, dérivation de $1/g$, Théorème de Leibniz,Dérivation de la composée
19. Remarque. limite simple de continue n'est pas continue x^n
20. Théorème. CVU + $\mathcal{C}^n$
21. Contre-exemple. Pas besoin d'info sur la suite des dérivées Hauchecorne
22. Application. Application aux séries entières Perso
23. Application. Van der Waerden
24. Application. DEVELOPPEMENT Théorème de Weierstrass (Zuily Queffelec)

Transition : on a vu tout plein de jolies caractérisation de la continuité et de la monotonie. Maintenant qu'on sait prouver qu'une fonction est continue ou dérivable, on regarde les principaux théorèmes que cela implique

2. Théorèmes principaux

2.1. Continuité sur un compact

Rombaldi

25. Définition. Uniforme continuité
26. Exemple. Fonctions lipschitzienne
27. Remarque. Uniformément continuité => continuité, contre-exemple : x^2 et exp, mais $\sqrt{x}$ l'est, puis uniforme continuité sur tout compact mais pas globalement
28. Théorème. Théorème de Heine
29. Théorème. Continue sur un compact est bornée sur un compact et atteint ses bornes

PERSO : utile pour de l'optimisation

2.2. Continuité sur un connexe

Rombaldi

30. Théorème. Théorème des valeurs intermédiaires
31. Exemple. Toute polynôme à coefficients réels de degré impair admet une racine réelle
32. Application. Lotka-Volterra
33. Application. Fonction continue et inversible => homéomorphisme
34. Contre-exemple. faux sur $\mathbf{C}$ par exemple $x \mapsto e^{i\pi x}$ (être bijective et continue, c'est être strictement monotone aussi : la condition est plus rigide sur $\mathbf{R}$)
35. Théorème. Dérivation de la réciproque
36. Application. Calcul de la dérivée de arcsin

2.3. Théorème de Rolle

Rombaldi

37. Théorème. Théorème de Rolle
38. Contre-exemple. f pas continue au bord, si pas dérivable à l'intérieur
39. Application. Racines de la dérivée d'un polynôme scindé à racine simple
40. Corollaire. Egalité des accroissements finis
41. Corollaire. Inégalité des accroissements finis
42. Application. Caractérisation de la croissance via la dérivée
43. Contre-exemple. x^3
44. Théorème. Darboux
45. Exemple. indicatrice de 0 n'est pas une fonction dérivée

2.4. Formules de Taylor

Gourdon

46. Théorème. Taylor-Lagrange
47. Application. DEVELOPPEMENT Méthode de Newton (Rouvière)
48. Corollaire. Inégalité de Taylor-Lagrange
49. Application. DSE de l'exponentielle
50. Théorème. Taylor-Young
51. Application. Développement asymptotique de la série harmonique

Transition : On passee maintenant à des fonctions particulières qui possèdent des résultats de régularité forts, voire qui étendent ces notions.

3. Exemples de fonctions régulières

3.1. Fonctions monotone et convexe

RDO 3

52. Théorème. Une fonction monotone a un nombre fini de points de discontinuité
53. Théorème. Si f est monotone et que son image est un intervalle, alors f est continue.
54. Théorème. Toute fonction monotone est dérivable presque partout (admis)

OA

55. Théorème. Fonction convexe est localement lipschitz
56. Corollaire. Toute fonction convexe est continue sur l'intérieur
57. Contre-exemple. Fonction sourire n'est pas continue sur le fermé

Rombaldoche

58. Théorème. Une fonction convexe et dérivable est $\mathcal{C}^1$

3.2. Distributions

Golse

59. Définition. Dérivation des distributions
60. Exemple. Dérivées de la masse de Dirac
61. Théorème. Ok pour une fonction $\mathcal{C}^1$
62. Proposition. Dérivations et constante
63. Théorème. Continuité de la dérivation
64. Théorème. Formule des sauts
65. Exemple. Dérivée d'Heayyside est le Dirac