Leçon 229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Références : RAMIS-DESCHAMPS-ODOUX - Tome 3 : Topologie et éléments d'analyse (abrégé en RDO 3) // GOURDON - Analyse // BECK-MALICK-PEYRE Objectif Agreg (abrégé en OA) // ROMBALDI - Elements d'analyse réelle

1. Fonctions monotone

1.1. Définition et propriété

RDO 3

1. Définition. Fonction monotone
2. Exemple. Fonction de répartition
3. Proposition. Monotone : injective ssi strictement monotone, Stable par CL positive, stabilité multiplication (positive), inverse
4. Contre-exemple. Pas un espace vectoriel (fonctions à variation bornée)
5. Exemple. Fonction de répartition
6. Définition. limite à gauche, limite à droite d'une fonction monotone
7. Application. DEVELOPPEMENT Lotka-Volterra (cf. le couteau suisse)

1.2. Suite de fonctions monotones

Gourdon

8. Proposition. Limite simple de fonctions croissantes est croissante
9. Contre-exemple. Pas croissance stricte x^n
10. Théorème. Dini 1
11. Théorème. Dini 2
12. Contre-exemple. $-x^n$ et x^n limite pas continue

1.3. Régularité et caractérisation

RDO 3

13. Théorème. L'ensemble des points de discontinuités d'une fonction monotone est au plus dénombrable
14. Exemple. Fonction de répartition, fonction partie entière de $1/x$ (Perso), peut même être dense (Hauchecorne)
15. Théorème. Si f monotone, alors f continue sur un intervalle ssi son image est un intervalle, même chose pour stricte monotonie
16. Corollaire. Homéomorphisme
17. Exemple. sin et arcsin
18. Proposition. Caractérisation de la monotonie via la dérivée, stricte monotonie avec l'intérieur vide
19. Remarque. Pas forcément vide : t^3
20. Théorème. Toute fonction monotone est dérivable presque partout (Admis)
21. Exemple. Cantor (continue, croissante, dérivable presque partout, de dérivée nulle presque partout)
22. Proposition. Brien et Pages (inégalité pour l'intégrale de la dérivée)

Transition de ouf : Après nous être intéressé aux propriétés des fonctions monotones et notamment celles de leur dérivée, on va s'intéresser à leur primitive, dont la généralisation est la classe des fonctions convexes/concaves.

2. Fonctions convexes

2.1. Définition et premières propriétés

Rombaldi

23. Définition. Convexité et stricte convexité, concavité
24. Théorème. Caractérisation épigraphe
25. Exemple. Norme (espace vectoriel normé), f convexe si et seulement $xf(1/x)$ l'est (Perso)
26. Proposition. Stable par CL positive, composée, lim simple, sup des fonctions convexes est convexe Rombaldoche
27. Contre-exemple. Pas stable par produit Rombaldoche
28. Théorème. Convexe => continue sur l'intérieur (OA)
29. Contre-exemple. Fonction sourire

2.2. Le cas de la droite réelle

Rombaldi

30. Théorème. Inégalité des pentes
31. Application. Une fonction est constante sur $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est convexe et majorée (Pour nous : peut-être équa diff)
32. Contre-exemple. Pas vrai sur intervalle de $\mathbf{R}$
33. Application. 8.14 Rombaldi dérivée à gauche et à droite
34. Théorème. Caractérisation croissance de la dérivée, tangente (ORAL faire le lien avec le théorème des fonctions monotones)
35. Exemple. exp convexe et log concave, x^p est convexe, Γ aussi

2.3. Application à la dimension supérieure

OA / Rombaldi

36. Théorème. Se ramène au cas de dimension 1
37. Proposition. Caractérisation par la différentiabilité
38. Théorème. Caractérisation par la double différentiabilité (Hessienne)
39. Exemple. $x \mapsto \frac{1}{2} < Ax,x > - < b,x >$ avec A symétrique définie positive est convexe

Transition : on voit des applications de ces caractérisations. Généralement, on se sert surtout des conditions nécessaires, après avoir prouvé qu'une fonction était concave ou convexe.

3. Application

3.1. Inégalités

Rombaldi

40. Exemple. Ingéalité de Jordan $2/\pi x < \sin(x) < x$
41. Théorème. Inégalité de Young
42. Corollaire. Hölder
43. Corollaire. Minkowski
44. Application. $(\mathscr{L}^p, \|.\|)$ est un espace vectoriel
45. Théorème. Jensen
46. Application. Jensen Proba
47. Théorème. Arithmético-géométrique

3.2. Problèmes d'optimisation

OA
48. Proposition. Unicité du minimum
49. Contre-exemple. 0 et exp
50. Application. Minimisation de $1/2 < Ax, x > + < b, x >$ Optimisation quadratique p24
51. Théorème. Cas différentiable, CNS de l'annulation de la différentielle pour être un minimum global
52. Contre-exemple. x^3
53. Théorème. DEVELOPPEMENT Minimisation Hilbert (perso)