

Leçon 230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Références : GOURDON - Analyse // BECK-MALICK-PEYRE - Objectif Agreg (abrégé OA) // HAUCHECORNE - Les contre-exemples en mathématiques

1. Séries à terme général positif

1.1. Définitions et absolue convergence

Gourdon

1. DÉFINITION. Somme partielle, restes
2. EXEMPLE. Séries arithmétiques/géométriques
3. PROPOSITION. Le terme général tend vers 0
4. CONTRE-EXEMPLE. Réciproque fautive : série harmonique
5. THÉORÈME. Critère de Cauchy
6. THÉORÈME. Absolue convergence
7. CONTRE-EXEMPLE. $(-1)^n/n$ série harmonique alternée

1.2. Théorème de comparaison des séries à terme général positif

Gourdon / Hauchecorne

8. THÉORÈME. Convergence ssi la suite des sommes partielles et convergente
9. COROLLAIRE. Comparaison par inégalité
10. CONTRE-EXEMPLE. Hauchecorne
11. THÉORÈME. Sommation des équivalents
12. CONTRE-EXEMPLE. Dans le Gourdon
13. THÉORÈME. Comparaison série/intégrale
14. THÉORÈME. Série de Riemann, série de Bertrand
15. APPLICATION. Développement asymptotique de la série harmonique

1.3. Applications aux critères de convergence

Gourdon / Hauchecorne

16. THÉORÈME. Règle de d'Alembert
17. THÉORÈME. Règle de Cauchy
18. REMARQUE. Cauchy mieux
19. CONTRE-EXEMPLE. Mais parfois ça fonctionne pas : formule de Bâle (Hauchecorne)
20. PROPOSITION. Comparaison logarithmique

Transition : alors, c'est cool ces critères, mais ça fait pas tout, on cherche mieux en explicitant des théorèmes ad hoc

2. Séries quelconques

2.1. Séries semi-convergentes

Gourdon

21. THÉORÈME. Critère de Leibniz
22. EXEMPLE. $(-1)^n/n$

23. DÉFINITION. Transformation d'Abel
24. THÉORÈME. Règle d'Abel
25. REMARQUE. Généralisation du critère de Leibniz
26. EXEMPLE. Série trigonométrique

2.2. Séries absolument convergentes

Gourdon / Hauchecorne

27. THÉORÈME. Série commutativement convergente
28. CONTRE-EXEMPLE. Si semi-convergente : on atteint n'importe quelle valeur, sommation par paquets de trois pour celle de ln
29. THÉORÈME. Produit de Cauchy
30. CONTRE-EXEMPLE. absolue convergence nécessaire
31. THÉORÈME. Série doubles
32. CONTRE-EXEMPLE. Hauchecorne

3. Calcul de sommes

3.1. Fonctions de la variable réelle

Gourdon / OA

33. THÉORÈME. Somme de Riemann
34. EXEMPLE. Calcul d'une somme
35. APPLICATION. DEVELOPPEMENT 1 Formule d'Euler-MacLaurin (Gourdon)
36. THÉORÈME. Théorème de Parseval
37. EXEMPLE. Formule de Bâle et celle de $1/n^4$
38. THÉORÈME. Convergence normale
39. EXEMPLE. Calcul de la somme avec le sin
40. APPLICATION. Inégalité isopérimétrique

3.2. Fonctions de la variable complexe

Gourdon

41. PROPOSITION. Lemme d'Abel
42. THÉORÈME. Convergence du disque
43. CONTRE-EXEMPLE. $\log(1+z)$
44. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT 2 Abel angulaire
45. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT 2 Taubérien faible
46. EXEMPLE. Calcul de la somme du ln blabla