Leçon 243. Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Références : GOURDON - Analyse // OUVRARD - Probabilités // TAUVEL - Analyse complexe pour la licence // BERTHELIN - Equations différentielles // FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS - Oraux X-ENS Algèbre 1 // BECK-MALICK-PEYRE - Objectif Agreg (abrégé en OA)

1. Convergence des séries entières

1.1. Rayon et disque de convergence

Gourdon

1. Définition. Série entière
2. Exemple. Série génératrice d'une loi
3. Proposition. Lemme d'Abel
4. Définition. Rayon et disque de convergence
5. Exemple. Rayon d'une série génératrice
6. Proposition. Différentes convergence par rapport au disque de convergence
7. Remarque. Sur le cercle, la série entière peut ou non converger ($\ln(1+x)$ converge en 1 mais pas en -1). Les séries de la remarque 1 ont même rayon de convergence.
8. Proposition. Somme et produit de séries entières
9. Contre-exemple. z^n et $-z^n$ sont de rayon 1 mais leur somme de rayon infini.

1.2. Calcul du rayon

Gourdon

10. Proposition. Règle de d'Alembert
11. Exemple. Rayon de convergence de $z^n/n!$
12. Remarque. Problème avec les séries lacunaires z^{2n} : on passe par d'Alembert avec série numérique.
13. Proposition. Théorème de Cauchy-Hadamard
14. Corollaire. Règle de Cauchy
15. Exemple. z^{2n} fonctionne avec Cauchy-Hadamard mais pas avec Cauchy. $a_n = e^{n\sin(n)}$ (Maison)
16. Remarque. Si la règle de d'Alembert s'applique, alors la règle de Cauchy s'applique (la réciproque est fausse).
17. Proposition. Si $a_n = \mathcal{R}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $\mathcal{R} =\sim$, alors $R_a = R_b$.
18. Exemple. $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et est donc de rayon de convergence 1.

1.3. Comportement au bord du disque

Gourdon / Ouvrard

19. Théorème. DEVELOPPEMENT Abel angulaire
20. Application. $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.
21. Théorème. DEVELOPPEMENT (suite) Taubérien faible

Exemples du Gourdon

22. Proposition. Moment d'ordre r et dérivabilité (Ouvrard)

2. Régularité de la somme

2.1. Régularité sur la droite réelle

Gourdon

23. Proposition. Continuite
24. Proposition. dérivabilité
25. Corollaire. $\mathcal{C}^\infty$
26. Contre-exemple. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ pas forcément somme d'une série entière : e^{-1/x^2}.
27. Remarque. Théorème de Borel : pour toute suite (a_n), il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de 0 telle que $f^{n})(0) = a_n$.

2.2. Holomorphie des fonctions analytiques

Tauvel / OA

28. Définition. Fonction analytique
29. Remarque. POUR NOUS si f est C^∞, on a une CNS sur la taille de ses dérivées pour que la fonction soit analytique
30. Exemple. $1/z$
31. Théorème. Somme d'une série entière est analytique
32. Contre-exemple. $1/z$ n'est pas somme d'une série entière
33. Théorème. Application ouverte (OA)
34. Théorème. Principe du prolongement analytique
35. Corollaire. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, alors $f = g$.
36. Application. Existence d'un unique prolongement d'une fonction analytique réelle en fonction analytique complexe (OA)
37. Théorème. Principe des zéros isolés
38. Exemple. il existe une fonction analytique non nulle sur $\mathbf{C}^*$ telle que $f(1/n) = 0$: 0 et $\sin(2\pi/z)$, mais par contre sur $\mathbf{C}$ seule la fonction nulle convient

2.3. Analycité des fonctions holomorphes

OA/Gourdon

39. Théorème. Formule de Cauchy
40. Théorème. Analycité des fonctions holomorphe
41. Proposition. taille du disque
42. Proposition. expression des coefficients
43. Proposition. inégalité de Cauchy
44. Application. Théorème de Liouville
45. Application. D'Alembert-Gauss
46. Remarque. Série de Laurent qui généralisent les séries entières

3. Applications

3.1. Développement en série entière de fonctions usuelles

Gourdon Motivation : on exprime des développement en série entière réelle et on les étend sur **C**.

47. PROPOSITION. usuels (exp, log, sin, cos etc.)
48. APPLICATION. Fonctions circulaires
49. PROPOSITION. Développement en série entière des fractions rationnelles (ça sert à koi ? ? ? –')

3.2. Résolution d'EDO

Berthelin (p146, IV.6)

50. APPLICATION. Calcul d'un développement en série entière (exo 3 Gourdon)
51. APPLICATION. Détermination d'une solution d'une équa. diff. sous forme de série entière (Berthelin)

3.3. Dénombrement

X-ENS 1

52. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Nombre de Catalan
53. THÉORÈME. Nombre de Bell