

## Leçon 262. Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Références : CANDELPERGHER - Théorie des probabilités // BARBE-LEDOUX - Probabilités // OUVRARD - Probabilités 2 // ZUILY-QUEFFELEC - Analyse pour l'agrégation

### 1. Convergences presque sûre et en probabilités

#### 1.1. Convergence presque sûre

Barbe et Ledoux / Candelpergher

1. DÉFINITION. Convergence presque sûre (Barbe et Ledoux)
2. REMARQUE. La partie est bien un événement (Barbe et Ledoux)
3. REMARQUE. Unicité presque sûre de la limite
4. PROPOSITION. CNS de convergence avec le  $\limsup$  (Barbe et Ledoux)
5. PROPOSITION. Critère de Cauchy (Barbe et Ledoux)
6. EXEMPLE. Exemple 1 de Barbe et Ledoux : suite de variables de Bernoulli
7. THÉORÈME. Lemme de Borel-Cantelli (Barbe et Ledoux)
8. CONTRE-EXEMPLE. Suite de variables uniformes (Candelpergher)

#### 1.2. Convergence en probabilité

Barbe et Ledoux / Ouvrard / Zuily Queffelec / Candelpergher

9. DÉFINITION. Convergence en probabilité (Barbe et Ledoux)
10. REMARQUE. Unicité presque sûre de la limite
11. EXEMPLE. Variables d'espérance nulle et de même variances  $\Rightarrow$  convergent en probabilité vers 0 (Barbe et Ledoux)
12. PROPOSITION. Convergence presque sûre implique convergence en probabilité (Barbe et Ledoux)
13. CONTRE-EXEMPLE.  $P(X_n = n) = 1/n$  et  $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$  (Candelpergher)
14. THÉORÈME. Cvg en proba ssi cvg presque sûre d'une sous-suite (Barbe et Ledoux)
15. EXEMPLE. Avec le contre-exemple (Candelpergher)
16. REMARQUE. Les notions de convergence en probabilité et presque sûre ne donnent pas une convergence de l'espérance. (Candelpergher)
17. THÉORÈME. Loi faible des grands nombres  $L^2$  (Zuily Queffelec)
18. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Polynômes de Bernstein + théorème de Stone-Weierstrass (Zuily Queffelec)

### 2. Convergence $L^p$

#### 2.1. Premiers résultats

Barbe et Ledoux

19. DÉFINITION. Convergence  $L^p$
20. REMARQUE. Convergence  $L^p$  implique  $L^q$  pour  $p \geq q$
21. PROPOSITION. La convergence  $L^p$  implique la convergence en proba
22. CONTRE-EXEMPLE. Barbe et Ledoux
23. THÉORÈME. Lien entre convergence  $L^p$  et convergence presque sûre

#### 2.2. Equi-intégrabilité

Ouvrard

24. DÉFINITION. Equi-intégrabilité
25. EXEMPLE. Une famille finie de variables aléatoires est U.I
26. PROPOSITION. CNS d'équi-intégralité
27. THÉORÈME. Vitali
28. APPLICATION. Cela permet de récupérer la loi des grands nombres pour une convergence  $L^p$

### 3. Convergence en loi et théorèmes limites

#### 3.1. Convergence en loi

Candelpergher / Barbe et Ledoux / Ouvrard

29. DÉFINITION. Convergence étroite (Candelpergher)
30. EXEMPLE.  $\delta_{1/n}$  vers  $\delta_0$  (Candelpergher)
31. DÉFINITION. Convergence en loi (Candelpergher)
32. EXEMPLE. Variables discrètes convergent vers une variable à densité (Candelpergher)
33. THÉORÈME. Caractérisation par les fonctions de répartitions (Barbe et Ledoux)
34. PROPOSITION. La convergence en probabilité (et donc la convergence presque sûre et  $L^p$ ) implique la convergence en loi (Barbe et Ledoux)
35. CONTRE-EXEMPLE. Exemple de la loi normale alternée (Barbe et Ledoux)
36. PROPOSITION. Convergence en loi vers une constante implique convergence en proba (Barbe et Ledoux)
37. LEMME. Lemme de Slutsky (Ouvrard2)
38. APPLICATION.  $X + Y$  et  $XY$
39. THÉORÈME. Théorème de Lévy (Ouvrard2)

#### 3.2. Théorèmes limites

Barbe et Ledoux

40. THÉORÈME. Loi faible des grands nombres  $L^1$
41. THÉORÈME. Loi forte des grands nombres
42. EXEMPLE. Barbe et Ledoux
43. THÉORÈME. DEVELOPPEMENT Théorème central limite
44. EXEMPLE. Barbe et Ledoux
45. APPLICATION. Construction d'intervalles de confiance asymptotiques