Groupes quantiques et Yangian

Des algèbres de Lie à leurs déformations

Jérôme Milot
jerome.milot@univ-lille.fr

Université de Lille
Laboratoire Paul Painlevé

07 février 2024

Objectifs

- Motivations de l'étude des groupes quantiques : un outil physique d'études de symétries.

Objectifs

- Motivations de l'étude des groupes quantiques : un outil physique d'études de symétries.
- Notions élémentaires d'algèbres de Lie et l'idée de l'algèbre enveloppante.

Objectifs

- Motivations de l'étude des groupes quantiques : un outil physique d'études de symétries.
- Notions élémentaires d'algèbres de Lie et l'idée de l'algèbre enveloppante.
- L'histoire des groupes quantiques : des solutions d'équations de Yang-Baxter aux déformations d'algèbres enveloppantes.

Objectifs

- Motivations de l'étude des groupes quantiques : un outil physique d'études de symétries.
- Notions élémentaires d'algèbres de Lie et l'idée de l'algèbre enveloppante.
- L'histoire des groupes quantiques : des solutions d'équations de Yang-Baxter aux déformations d'algèbres enveloppantes.
- Cas particulier des représentations du Yangian.

Sommaire

Sommaire

Définition

Une **algèbre de Lie** est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, appelée **crochet de Lie**, vérifiant :

- l'antisymétrie : $\forall x \in \mathfrak{g}$: $\quad [x, x] = 0;$
- l'identité de Jacobi :
  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$: $\quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$

Exemples

- Toute algèbre R munie du commutateur
$$\forall x, y \in R : \quad [x, y] = xy - yx.$$
- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni du commutateur.
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: matrices de trace nulle, muni du commutateur.

Exemples

Exemples

- Toute algèbre R munie du commutateur

$$\forall x, y \in R : \quad [x, y] = xy - yx.$$

- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni du commutateur.
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: matrices de trace nulle, muni du commutateur.

Exemples physiques

- $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(p, q, c) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty)$ l'algèbre de Heisenberg, le crochet vérifiant :

$$[p, q] = c; \quad [c, p] = [c, q] = 0.$$

- Étude des symétries en physique : en mécanique hamiltonienne, les constantes de mouvement forment une algèbre de Lie.

Exemple fondamental

L'exemple fondamental de $\mathfrak{sl}_2$

- Générateurs :

$$X^+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Relations entre générateurs :

$$\left[X^+, X^-\right] = H; \quad \left[H, X^+\right] = 2X^+; \quad \left[H, X^-\right] = -2X^-.$$

- Intérêt : brique élémentaire des algèbres de Lie en général.

Définition

Une **représentation** d'une algèbre de Lie est la donnée d'un espace vectoriel V muni d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : \quad \rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

Représentations

Définition

Une **représentation** d'une algèbre de Lie est la donnée d'un espace vectoriel V muni d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : \quad \rho\left([x,y]\right) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

Exemple

On peut munir $\mathfrak{g}$ d'une structure de représentation de $\mathfrak{g}$ via le morphisme d'algèbres de Lie appelé **adjoint** : $\mathrm{ad} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathrm{End}\left(\mathfrak{g}\right) \\ x & \mapsto & \mathrm{ad}_x : (y \mapsto [x,y]) \end{array}$.

Exemples

- Les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ sont paramétrées par les entiers positifs.
- L'algèbre de Heisenberg n'admet qu'une seule représentation irréductible (**Fock**).

Applications

- Les représentations de $\mathfrak{sl}_n$ permettent de quantifier les niveaux d'énergie d'une particule.
- La représentation de Fock a permis d'établir la correspondance boson-fermion.

Sommaire

Idée : Interpréter le crochet de Lie comme un commutateur d'une algèbre.

Construction de l'algèbre universelle enveloppante

Idée : Interpréter le crochet de Lie comme un commutateur d'une algèbre.

Construction : On construit l'algèbre tensorielle, qu'on quotiente par l'idéal $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$.

Remarque

Pour A algèbre, l'algèbre universelle enveloppante $U(A)$ de A vue en tant qu'algèbre de Lie n'est pas égale à A. Par exemple, pour $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, l'algèbre A est un espace vectoriel de dimension finie alors que $U(A)$ est de dimension infinie.

Algèbre de Hopf

Proposition

L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure d'**algèbre de Hopf**, c'est-à-dire que c'est une algèbre munie des applications linéaires :

- **counité** : $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$;
- **coproduit** : $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$;
- **antipode** : $S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$

vérifiant des relations.

Intérêt : Permet d'obtenir de nouvelles représentations à partir du produit tensoriel. En terme catégorique, cela signifie que la catégorie des représentations d'une algèbre de Hopf est monoïdale.

Sommaire

L'équation de Yang-Baxter

Définition

Pour A algèbre associative, l'**équation de Yang-Baxter** est définie sur $A \otimes A \otimes A$, avec $R \in A \otimes A$:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

On appelle **R-matrices** les solutions des équations de Yang-Baxter.

On peut diviser les solutions de ces équations en trois familles : les rationnelles, trigonométriques et les elliptiques.

Groupe quantique

Définition

Un **groupe quantique** est une algèbre associative associée à une R-matrice.

On peut diviser les groupes quantiques en trois familles : les Yangians (rationnelles), les algèbres quantiques (trigonométriques) et les algèbres elliptiques (elliptiques).

Histoire

Motivation : Obtenir de nouveaux groupes quantiques.
On disposait alors déjà des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, mais leur structure d'algèbre de Hopf est restreinte (cocommutative).

L'histoire des algèbres quantiques

Histoire

Motivation : Obtenir de nouveaux groupes quantiques.
On disposait alors déjà des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, mais leur structure d'algèbre de Hopf est restreinte (cocommutative).

Idées :

- Déformer la structure d'algèbre de Hopf de l'algèbre universelle enveloppante. (Drinfeld Jimbo 1985)
- Considérer un espace de polynômes/fractions rationnelles sur l'algèbre de Lie, puis déformer les relations en respectant les degrés. (Drinfeld 1988)

Sommaire

Principe : Déformation des relations d'une algèbre de Lie.

Exemple de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. L'**algèbre quantique** de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notée $U_q^{\mathsf{DJ}}(\mathfrak{sl}_2)$ est définie par des générateurs X, Y, K et K^{-1} vérifiant :

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1; \quad KXK^{-1} = q^2 X; \quad KYK^{-1} = q^{-2}Y;$$
$$XY - YX = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Déformation de l'algèbre de Hopf

$$\begin{array}{lll}
\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes K; & \Delta(Y) = K^{-1} \otimes Y + Y \otimes 1; & \Delta(K) = K \otimes K; \\
S(X) = -XK^{-1}; & S(Y) = -KY; & S(K) = K^{-1}; \\
\epsilon(X) = 0; & \epsilon(Y) = 0; & \epsilon(K) = 1.
\end{array}$$

Algèbre de lacets quantique

Principe : On part d'une autre grande idée des groupes quantiques : on déforme un espace de fonctions rationnelles sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelé l'espace de lacets.

Exemple de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $q \in \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}$. L'**algèbre de lacets quantiques** de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est définie par des générateurs $\varphi_r^\pm, x_r^\pm$ avec $r \in \mathbb{N}$ vérifiant des relations de déformations similaires à celle définissant les algèbres quantiques, avec des conditions de compatibilité de degrés.

Algèbre de lacets quantique

Principe : On part d'une autre grande idée des groupes quantiques : on déforme un espace de fonctions rationnelles sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelé l'espace de lacets.

Exemple de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $q \in \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}$. L'**algèbre de lacets quantiques** de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est définie par des générateurs $\varphi_r^{\pm}, x_r^{\pm}$ avec $r \in \mathbb{N}$ vérifiant des relations de déformations similaires à celle définissant les algèbres quantiques, avec des conditions de compatibilité de degrés.

Problème

- Pas d'expression explicite du coproduit (par exemple).
- Si on utilise cette construction dans un cadre plus générale (algèbre de Kac-Moody), on perd la structure d'algèbre de Hopf telle que définie, au profit d'une structure d'algèbre de Hopf topologique.

Sommaire

Motivations du Yangian

- Premiers groupes quantiques découverts (pour $\mathfrak{gl}_n$, début des années 1980 par Faddeev).
- Utilisés dans un cadre physique, mais introduites via générateurs et relations (1985 et 1988) par Drinfeld, les nommant d'après Chen-Ning Yang.
- Caractérisent une famille solutions de l'équation de Yanx-Baxter, elles apparaissent comme des groupes de symétries de différents modèles en physique.

J-présentation

Principe

Introduit par Drinfeld en 1985. Même idée que la présentation de Drinfeld-Jimbo appliquée à l'algèbre de courant $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[u]$.

- **Générateurs :** $\{x, J(x)\}_{x \in \mathfrak{g}}$;
- **Relations :** conditions sur le comportement de J et du crochet de Lie.

- **Intérêt :** Une structure d'algèbre de Hopf et des relations simples à manipuler. Bonne interprétation des générateurs (moralement, $J(x) = x \otimes u$).
- **Limite :** Perte de l'idée d'un espace de fonctions.

Présentation courante

Principe

Introduite par Drinfeld en 1988. Même idée que la présentation de Drinfeld : la déformation s'effectue de paire avec l'adjonction de l'espace polynomial.

- **Générateurs :** $\{X_{i,r}^{+}, X_{i,r}^{-}, H_{i,r}\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ r \in \mathbb{N}}}$.
- **Relations :** Déformations des relations crochets de $\mathfrak{g}$ et conditions de compatibilité de degrés.

- **Intérêt :** Très manipulable, permettant de travailler avec des outils algébriques. Bonne interprétation des générateurs (moralement, "$H_{i,r} = H_i \otimes u^r$").
- **Limite :** Pas d'expression explicite du coproduit, bien que des résultats partiels (Knight) existent.

RTT-présentation

Principe

Directement issue de la physique (1979) : le Yangian est caractérisé grâce à une solution d'une équation de Yang-Baxter.

- **Générateurs :** Une T-matrice $T(u)$ dont les coefficients sont des séries formelles en les éléments du Yangian.
- **Relations :** $T(u)$ vérifie l'équation :

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v)$$

où R est solution de l'équation de Yang-Baxter, appelée Yang R-matrice.

- **Intérêt :** Très usitée en physique et c'est d'elle dont on se sert pour la classification des représentations irréductibles de dimension finie. De plus, description simple du centre du Yangian grâce au déterminant quantique.
- **Limite :** Les relations codées par la R-matrice sont généralement trop compliquées.

RTT-présentation de $\mathfrak{gl}_n$

Proposition

Le Yangian de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre associative engendrée par les éléments $(t_{i,j}^{(r)})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ r\in\mathbb{N}}}$, vérifiant les relations :

$$\left[t_{i,j}^{(r+1)}, t_{k,l}^{(s)}\right] - \left[t_{i,j}^{(r)}, t_{k,l}^{(s+1)}\right] = t_{k,j}^{(r)} t_{i,l}^{(s)} - t_{k,j}^{(s)} t_{i,l}^{(r)}.$$

Dans ce cas, on a une expression explicite de $T(u)$:

$$T(u) = \begin{pmatrix} t_{1,1}(u) & \dots & t_{1,n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1}(u) & \dots & t_{n,n}(u) \end{pmatrix}$$

où $t_{i,j}(u) = 1 + t_{i,j}^{(1)} u^{-1} + t_{i,j}^{(2)} u^{-2} + \dots$.
De plus, la R-matrice associée est de la forme :
$1 \otimes 1 \otimes 1 - u^{-1} \otimes \tau^{-1} \in Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]] \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ avec τ le twist sur $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Sommaire

Morphisme d'évaluation

On se place dans le cadre particulier de $\mathfrak{gl}_n$.

Définition

On définit le **morphisme d'évaluation** via :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{gl}_n) & \to & U(\mathfrak{gl}_n) \\ t_{i,j}^{(r)} & \mapsto & \delta_{i,j}\delta_{r=0} + E_{i,j}\delta_{r=1} \end{array}.$$

- C'est un morphisme d'algèbres mais pas un morphisme d'algèbres de Hopf.
- On ne dispose pas de morphisme d'évaluation pour les algèbres de Lie d'un autre type.

Morphisme d'évaluation

On se place dans le cadre particulier de $\mathfrak{gl}_n$.

Définition

On définit le **morphisme d'évaluation** via :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{gl}_n) & \to & U(\mathfrak{gl}_n) \\ t_{i,j}^{(r)} & \mapsto & \delta_{i,j}\delta_{r=0} + E_{i,j}\delta_{r=1} \end{array}.$$

- C'est un morphisme d'algèbres mais pas un morphisme d'algèbres de Hopf.
- On ne dispose pas de morphisme d'évaluation pour les algèbres de Lie d'un autre type.

Proposition

Tout $\mathfrak{gl}_n$-module peut être muni d'une structure de $Y(\mathfrak{gl}_n)$-module via le morphisme d'évaluation. On l'appelle alors **module d'évaluation**.

Description des modules irréductibles pour $\mathfrak{gl}_2$

On se place dans le cas particulier de $\mathfrak{gl}_2$.

Théorème

Toute représentation irréductible de dimension finie de $Y(\mathfrak{gl}_2)$ est décomposable en produits tensoriels de représentations d'évaluation irréductibles de dimensions finies. De plus, cette décomposition est unique à isomorphisme près.

- C'est un intérêt du Yangian : le produit tensoriel de représentations irréductibles de dimensions finies est encore une représentation irréductible, contrairement au cas de $\mathfrak{gl}_2$.
- On ne dispose pas de décomposition analogue pour les autres algèbres de Lie (même les $\mathfrak{gl}_n$ pour $n > 2$).

Merci pour votre attention !

C. Vyjayanthi and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*.
Cambridge University Press, 1995.

N. Guay, V. Regelskis, and C. Wendlandt, "Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic yangians," *Lett. Math. Phys.*, 2019.

J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases*.
American Mathematical Society, 2002.

A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*.
American Mathematical Society, 2007.

Classification des représentations

Théorème

Soit L une représentation irréductible de $Y(\mathfrak{g})$. Alors L est dimension finie si et seulement il existe un unique k- uplet de polynômes unitaires $(P_1(u), \ldots, P_k(u))$ tel que L est isomorphe au module de plus haut l-poids

$$L\left(\frac{P_1(u+d_1)}{P_1(u)}, \ldots, \frac{P_k(u+d_k)}{P_k(u)}\right).$$

Idée de démonstration

- **Étape 1 :** On montre qu'une représentation irréductible de dimension finie est de plus haut l-poids. On prouve donc la caractérisation sur les représentations de plus haut l-poids.

- **Étape 2 :** On montre le sens direct : si L est de dimension finie, alors on construit les polynômes.
  - **Étape 2.1 :** On montre qu'on peut se ramener à l'étude de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ via un lemme de réduction.
  - **Étape 2.2 :** On démontre le résultat pour $\mathfrak{gl}_2$ en utilisant la caractérisation de l'irréductibilité avec le plus haut l-poids et le co-plus haut l-poids.
  - **Étape 2.3 :** On en déduit le résultat pour $\mathfrak{sl}_2$.

- **Étape 3 :** On montre le sens indirect en utilisant des arguments similaires au cas classique, notamment via la théorie des modules intégrables.

J-présentation

Définition

Soit $(\ ,\ )$ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ et soit (x_λ) une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ associée à cette forme bilinéaire. On définit la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre unitaire associative $Y_h(\mathfrak{g})$ engendrée par les $x \in \mathfrak{g}$ et les $J(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ vérifiant les relations suivantes (pour tous $x, y, z, w \in \mathfrak{g}$).

$$xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}}\,; \tag{1}$$

$$[x, J(y)] = J\left([x, y]\right); \tag{2}$$

$$J(ax + by) = aJ(x) + bJ(y); \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&[J(x), J([y, z])] + [J(z), J([x, y])] + [J(y), J([z, x])] \\ &= h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu} \left([x, x_\lambda], [[y, x_\mu], [z, x_\nu]]\right) \{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Présentation courante

Définition

La présentation **courante** du Yangian, notée $Y^c(\mathfrak{g})$, est l'algèbre associative engendrée par les générateurs $X_{i,r}^{\pm}$, $H_{i,r}$ pour $i = 1, \ldots, n$, $r \in \mathbb{N}$, vérifiant les relations suivantes :

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0; \tag{5}$$

$$\left[H_{i,0}, X_{j,s}^{\pm}\right] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) X_{j,s}^{\pm}; \tag{6}$$

$$\left[H_{i,r+1}, X_{j,s}^{\pm}\right] - \left[H_{i,r}, X_{j,s+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)\left(H_{i,r}X_{j,s}^{\pm} + X_{j,s}^{\pm}H_{i,r}\right); \tag{7}$$

$$\left[X_{i,r}^{+}, X_{j,s}^{-}\right] = \delta_{i,j} H_{i,r+s}; \tag{8}$$

$$\left[X_{i,r+1}^{\pm}, X_{j,s}^{\pm}\right] - \left[X_{i,r}^{\pm}, X_{j,s+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)\left(X_{i,r}^{\pm}X_{j,s}^{\pm} + X_{j,s}^{\pm}X_{i,r}^{\pm}\right); \tag{9}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \left[X_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm}, \left[X_{i,r_{\sigma(2)}}^{\pm}, \ldots, \left[X_{i,r_{\sigma(m)}}^{\pm}, X_{j,s}^{\pm}\right] \ldots\right]\right] = 0 \tag{10}$$

pour toute collection d'entiers positifs $r_1, \ldots, r_m$ où $m = 1 - a_{i,j}$.

Conditions algèbre de Hopf

$$
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}
$$