Lecture dirigée 2020 -Principes d'incertitude et Théorème de Logvinenko-Sereda

Jérôme Milot et Victor Thuot

Abstract :
Le sujet de ce document est le principe d'incertitude. Un principe d'incertitude est une propriété ou relation qui limite la concentration d'une fonction et de sa transformée de Fourier.
Nous introduisons d'abord la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ grâce au théorème de Plancherel, puis nous présentons le principe d'incertidude d'Heisenberg qui est le plus célèbre de sa catégorie. Dans un troisième paragraphe, la notion de paire annulante est introduite. Celle-ci définit une autre forme de principe d'incertitude et nous donnons un exemple de paire annulante. Le quatrième paragraphe porte sur la mesure de Poisson et deux inégalités de Jensen, permettant de démontrer certains résultats utiles pour le paragraphe final, traîtant du théorème principal de ce document : le théorème de Logvinenko-Séréda. Ce théorème caractérise les parties mesurables de $\mathbb{R}$ formant une paire fortement annulante avec toute partie de $\mathbb{R}$ mesurable et bornée.

1 Introduction aux transformations de Fourier

L'objectif de cette partie est d'obtenir quelques résultats de calcul de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ avec en particulier le théorème d'inversion sur $L^1(\mathbb{R})$ et de conclure avec le théorème de Plancherel qui permet de définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

(i) Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. L'intégrale $\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}dx$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut alors définir la transformée de Fourier de f comme l'application qui à f associe $\hat{f}$ (on utilisera toujours cette convention pour la transformée de Fourier).

Propriété 2.
Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
i) si $g(x) = f(x-\alpha)$, alors $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)e^{-i\alpha x}$
ii) si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, alors $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-\alpha)$
iii) si $g \in L^1$ et $h = f * g$, alors $\hat{h}(x) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(x)\hat{g}(x)$

iv) si $g(x) = \overline{f(-x)}$, alors $\hat{g}(x) = \overline{\hat{f}(x)}$
v) si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ avec $\lambda > 0$, alors $\hat{g}(x) = \lambda \hat{f}(\lambda x)$

◇ Remarque.
Les lemmes et propriétés qui suivent ont pour première vocation la démonstration de deux théorèmes essentielles : le théorème d'inversion $L^1(\mathbb{R})$ et le théorème de Plancherel.

Lemme 3.
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}$. On définit la translatée f_y de f par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f_y(x) = f(x-y)$$

Si $p \in [1,\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors l'application

$$y \longmapsto f_y$$

est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R})$

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}_c$ (fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact) dans L^p, on sait qu'il existe g continue à support compact (on peut supposer $A > 0$ tel que le support de g est inclus dans $[-A,A]$) tel que :

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

Puis, par uniforme continuité de g (théorème de Heine) : $\exists \delta \in]0,A]$ tel que $\forall (s,t) \in (\mathbb{R})^2, |s-t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| < (3A)^{-\frac{1}{p}}\varepsilon$
Ainsi, on a (si $t > s$ par exemple) pour $|t-s| < \delta$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x-s)|^p dx &= \int_{-A-s}^{A+t} |g(x-t) - g(x-s)|^p dx \\ &< (3A)^{-1}\varepsilon^p(2A + (t-s)) \\ &< \varepsilon^p\end{aligned}$$

On a donc $\|g_s - g_t\|_p \leqslant \varepsilon$
Puis, on sait que les normes L^p sont invariables par translation pour la mesure de Lebesgue. Ainsi, $\|f_s\|_p = \|f_t\|_p$
Reste alors, pour $|s-t| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}\|f_s - f_t\|_p &\leqslant \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p \\ &\leqslant \|(f-g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(f-g)_t\|_p \\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 4.
On note $\mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en les infinis.
Si $f \in L^1$, alors on a $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ et :

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Preuve
L'inégalité est évidente par inégalité triangulaire.
Puis, lorsque $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$, on a :

$$\|\hat{f}(t_n) - \hat{f}(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-it_nx} - e^{-itx}|dx$$

Or, l'intégrande est bornée par $2|f| \in L^1$ et tend simplement vers 0 pour $[n \to \infty]$. Ainsi, par convergence dominée, on a $\hat{f}(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} \hat{f}(t)$. Par caractérisation séquentielle, on a bien $\hat{f} \in \mathcal{C}^0$
Puis : $\hat{f}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-it(x+\frac{\pi}{t})}dx \underset{chgt\ var}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\frac{\pi}{t})e^{-itx}dx$
Ainsi : $2\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \left\{f(x) - f(x-\frac{\pi}{t})\right\} e^{-itx}dx$
D'où, une nouvelle fois par inégalité triangulaire :

$$2|\hat{f}(t)| \leqslant \|f - f_{\frac{\pi}{t}}\|_1$$

Ainsi, en faisant tendre t vers 0 et vers l'infini, le lemme 3 assure que f est bien à limites nulles en les infinis (car $f = f_0$). □

(ii) Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

◇ Remarque.
Pour toute la suite, on considère $H(t) = e^{-|t|}$ et $h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)e^{itx}dt$. Ces fonctions vont permettre par convolution de démontrer le thérème d'inversion et le théroème de Plancherel. On reconnait le lien avec les lois de Cauchy en probabilité, ce qui permet de calculer simplement :

$$h_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x)dx = 1$$

Propriété 5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall\lambda > 0, x \in \mathbb{R}\ (f * h_\lambda)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

Preuve Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini. □

Théorème 6.
Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ continue en un point $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\underset{\lambda \to 0}{lim}(g * h_\lambda)(x) = g(x)$$

Preuve

$$\begin{aligned}(g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)]h_\lambda(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-y) - g(x)]\frac{1}{\lambda}h_1(\frac{y}{\lambda})dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x-\lambda s) - g(x)]h_1(s)ds\end{aligned}$$

L'intégrande est majorée par $2\|g\|_\infty h_1(s)$ qui est intégrable, et elle tend simplement vers la fonction nulle lorsque λ tend vers 0. Par théorème de convergence de dominée, on a donc bien le résultat. □

Lemme 7.
Soit $p \in [0; \infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors

$$\underset{\lambda \mapsto 0}{lim}||f * h_\lambda - f||_p = 0$$

Preuve

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)]h_\lambda(y)dy$$

On utilise l'inégalité de Jensen (en probabilité) et alors :

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y)dy.$$

Enfin on intègre et on applique Fubini-Tonelli :

$$||(f * h_\lambda) - f||_p^p \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} ||f_y - f||_p^p h_\lambda(y)dy$$

Si on note $g(y) = ||f_{-y} - f||_p^p$ alors $\int_{-\infty}^{\infty} ||f_y - f||_p^p h_\lambda(y)dy = g * h_\lambda(0)$, d'après le lemme 3, g est continue et $g(0) = 0$. De plus g est bornée par $2||f||_p^p$. En utilisant le théorème 6 on a donc $\underset{\lambda \mapsto 0}{lim}\, g * h_\lambda(0) = 0$ ce qui conclue. □

Théorème 8. Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, de même que $\hat{f}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}\tfrac{dt}{\sqrt{2\pi}}(x \in \mathbb{R})$$

Alors $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $f(x) = g(x)$ presque partout.

Preuve D'après la propriété 6,

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

L'intégrande du membre de droite est bornée par $|\hat{f}(t)|$ intégrable par hypothèse et on sait que $H(\lambda t) \to 1$ (simplement) lorsque $\lambda \to 0$. Le théorème de convergence dominée assure donc que le membre de droite converge vers $g(x)$. D'autre part on sait que $f * h_\lambda \mapsto f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (lemme 7) ainsi quitte à en extraire une sous suite, $\underset{\lambda \to 0}{lim}(f * h_\lambda)(x) = f(x)$ presque partout. □

(iii) Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Lemme 9.
Supposons :
(a) X et Y sont des espaces métriques, avec X complet.
(b) $f : X \to Y$ est continue
(c) X possède un sous-ensemble X_0 dense sur lequel f est une isométrie et $f(X_0)$ est dense dans Y
Alors, f est une isométrie bijective de X sur Y (en particulier, $f(X) = Y$)

Preuve
La continuité de f sur X et la densité de X_0 dans X font de f une isométrie sur X.
Soit $y \in Y$. Puisque $f(X_0)$ est dense dans Y, il existe une suite $(x_n)_n \in X_0^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to y$. Puisque la suite $f(x_n)_n$ converge, elle est de Cauchy dans Y. Puis, comme f est une isométrie sur X_0, on a que $(x_n)_n$ est également une suite de Cauchy. Comme X est complet, $x_n \to x \in X$, et par continuité de f : $f(x) = y$, d'où le résultat. Comme f est une isométrie sur X elle est injective, de plus on vient de montrer qu'elle est surjective. Donc f est une isométrie bijective. □

Théorème 10. Théorème de Plancherel
A chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :
i) Si $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.
ii) $\forall f \in L^2$, on a : $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$
iii) L'application $f \longrightarrow \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$
iv) Entre f et $\hat{f}$, il existe les relations symétriques suivantes :
En posant $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}dx$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t)e^{-itx}dt$:

$$\underset{A \to \infty}{lim}\|\varphi_A - \hat{f}\|_2 = 0 \text{ et } \underset{A \to \infty}{lim}\|\psi_A - f\|_2 = 0$$

v) La transformée de Fourier est un isomorphisme bicontinu.

Preuve
La démonstration du théorème repose sur la relation :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On pose $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$. Ainsi :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}dy$$

On constate donc que $g(x) = \langle f_{-x}, f\rangle$ avec le produit scalaire au sens du Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Puisque $x \to f_{-x}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (Lemme 3) et que le produit scalaire est également continu, on a également g continue. Par Cauchy-Schwarz, on a de plus :

$$|g(x)| \leqslant \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2$$

g est ainsi bornée, et dans $L^1(\mathbb{R})$ (car la convolution conserve la meilleure régularité, et ici les deux fonctions sont $L^1(\mathbb{R})$). Ainsi, on a, en utilisant la fonction auxiliaire introduite précédemment :

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{g}(t)dt$$

Puis, g est continue et bornée, donc on peut appliquer le théorème 7 :

$$\underset{\lambda\to 0}{lim}(g * h_\lambda)(0) = g(0) = \|f\|_2^2$$

Puis, d'après la propriété 2), on a : $\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geqslant 0$. De plus, puisque $H(\lambda t) \underset{\lambda\to 0}{\nearrow} 1$, on a par convergence monotone :

$$\underset{\lambda\to 0}{lim} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt$$

Ainsi, d'après toutes ces égalités, on a : $\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$, d'où notre premier résultat.

Puis, on introduit Y, l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions dans $L^1 \cap L^2$. D'après notre raisonnement précédent, on constate que $Y \subset L^2(\mathbb{R})$
Montrons maintenant que Y est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui revient donc à montrer (puisque nous sommes dans un espace Hilbertien) : $Y^\perp = \{0\}$.
On constate que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, les fonctions $x \to e^{i\alpha x}H(\lambda x) \in L^1 \cap L^2$. Ainsi, on sait que leur TF sont dans Y. Ces TF s'écrivent :

$$h_\lambda(\alpha - t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}H(\lambda x)e^{-ixt}dx$$

Soit $\omega \in Y^\perp$. On a, pour tout α réel :

$$(h_\lambda * \overline{\omega})(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha - t)\overline{\omega}(t)dt = 0$$

Donc, d'après le lemme 7, on a finalement $\omega = 0$, d'où Y dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
En notant donc provisoirement F l'application qui à une fonction associe sa transformée de Fourier, on a donc démontré que F est une isométrie au sens de L^2 du sous-espace complet dense $L^1 \cap L^2$ dans le sous-espace dense Y. On sait alors, d'après le lemme 9, que F peut se prolonger en une isométrie $\tilde{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. On a alors le résultat pour les deux premiers points.
Or, la caractérisation des bases hilbertiennes par l'égalité de Parseval permet également de déduire iii), et la formule de Parseval reste donc valable pour tous $f,g \in L^2$
Enfin, pour iv) : si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on constate que $1_A f \in L^1 \cap L^2$ et $\varphi_A = \widehat{1_A f}$. Or, on sait que $\|f - 1_A f\|_2 \underset{A\to\infty}{\longmapsto} 0$, donc ii) donne alors : $\|\hat{f} - \varphi_A\|_2 = \|\widehat{f - 1_A f}\|_2 \to 0$ d'où le résultat (on procède de la même façon pour la seconde limite)
On a de plus que la transformée de Fourier est bicontinue. En effet elle est continue sur $L^2(\mathbb{R})$ comme prolongement par continuité d'une application continue sur $L^1 \cap L^2$. Puis elle est linéaire et bijective entre deux Banach, la réciproque est donc continue (théorème d'isomophisme de Banach). □

2 Principe d'incertitude d'Heisenberg

Théorème 11.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$(\int x^2 f(x)^2 dx)(\int t^2 \hat{f}(t)^2 dt) \geqslant \frac{1}{4}\|f\|_2^4$$

Preuve
Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Puisque f est dans l'espace de Schwartz, $\int x^2 f(x)^2 dx < \infty$ et $\int t^2 \hat{f}(t)^2 dt < \infty$. La dérivation de $|f|^2 = f\overline{f}$ est $2Re(f\overline{f'})$. Comme $\int t^2 \hat{f}(t)^2 dt < \infty$ et que la transformée de fourier de f' est $it\hat{f}$ on a $f' \in L^2(\mathbb{R})$ ($f \in S$ implique $\hat{f} \in L^2$).
Si $-\infty < a \leqslant b < \infty$, une intégration par partie donne :

$$2Re \int_a^b tf(t)\overline{f'(t)}dt = [t|f(t)|^2]_a^b - \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Les fonctions f, tf et f' sont dans $L^2(\mathbb{R})$ et en outre $t \mapsto tf(t)\overline{f'(t)}$ est intégrable. Comme $f \in S(\mathbb{R})$, les termes de bord sont nuls. Donc

$$2Re \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\overline{f'(t)}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Finalement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Plancherel (isométrie de la transormée de Fourier) assurent que :

$$||f||_2^4 \leqslant 4\int t^2|f(t)|^2 dt \int |f'(t)|^2 dt = 4\int x^2|f(x)|^2 dx \int t^2|\hat{f}(t)|^2 dt$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on utilise la densité de $S(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

◇ Remarque.
L'inégalité d'Heisenberg donne ainsi un bon exemple du principe d'incertitude. Elle caractérise le fait que l'on ne peut pas localiser précisement et simultanément une fonction et sa transformée de fourier. En mécanique quantique, on ne peux pas mesurer la position et la quantité de mouvement d'une particule avec précision.

3 Notions de paires annulantes

La notion de paire annulante est une autre forme de principe d'incertitude. On voit d'abord que deux partie bornées forment une paire faiblement annulante, puis on caractérise les paires fortement annulantes.

Définition 12.
Soit (S,S') deux boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que (S,S') forme une paire faiblement annulante si $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ $[supp\ f \subset S$ et $supp\ \hat{f} \subset S' \Rightarrow f = 0]$

Propriété 13.
Soient a et b deux réels positifs. Alors $(S,S') := (]-a,a[,]-b,b[)$ est une paire annulante.

Preuve
On doit montrer qu'une fonction non identiquement nulle à support borné a un spectre (support de la transformée de Fourier) non borné.

Méthode 1 : Par théorèmes d'holomorphie
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp\ f \subset S =:]-a;a[$. On définit la transformée de Fourier vue sur $\mathbb{C}$ qui a $z \in \mathbb{C}$ associe $\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixz}dx$.
Montrons que la fonction $\hat{f}$ est ainsi bien définie et est holomorphe.
$\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto f(x)e^{-ixz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
$\forall z \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ixz}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet f est à support compact, $f \in L^2(]-a;a[) \subset L^1(]-a;a[)$ donc f est intégrable. De plus $x \mapsto e^{-ixz}$ est continue sur le support de f donc bornée. L'intégrande est donc bien dominée par une fonction intégrable.
Finalement le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale assure que $\hat{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le principe des zéros isolés assure que la transformée de fourier de f est nulle ou que l'ensemble de ses zéros est discret. Finalement, si f non nulle à support borné, son spectre est non borné.

Méthode 2 : Par convolution avec une fonction porte
La deuxième repose sur l'étroit lien entre la convolution et la transformation de Fourier. Pour ce faire, on introduit une fonction "porte" : $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. Puisque *supp* $f \subset B(0,a)$, on a : $\forall t, f(t) = f(t)\Pi(\frac{t}{2a})$.
On peut alors passer à la transformée de Fourier dans cette égalité, ce qui nous donne (car la TF a pour propriété de transformer la convolution en produit et le produit en convolution) :

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t) * \hat{\Pi}(\tfrac{t}{2a})$$

Or, on sait que $\hat{\Pi}(t) = \frac{sin(t)}{t} = sinc(t)$, donc :

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t) * 2sinc(at)$$

Or, par hypothèse, le support de $\hat{f}$ est compact (fermé par définition, bornée par hypothèse, et nous sommes en dimension finie). On a donc :

$$supp\ \hat{f} = supp\ \hat{f} + supp\ (2sinc(at))$$

Or, il se trouve que le *supp* du sinus cardinal est infini. Cette égalité n'est donc possible que si *supp* $\hat{f} = \emptyset$, ie : $\hat{f} = f = 0$, d'où le résultat. □

DÉFINITION 14.
Soit (S,S') deux boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que (S,S') forme une paire fortement annulante si il existe $C(S,S')$ tel que $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leqslant C(S,S')(\int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}\setminus S'} |\hat{f}(t)|^2 dt)$$

◇ REMARQUE.
Une paire fortement annulante est annulante.

PROPRIÉTÉ 15.
(S,S') est fortement annulante
ssi il existe $D(S,S')$ tel que $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que *supp* $\hat{f} \subset S'$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leqslant D(S,S')(\int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^2 dx)$$

Preuve
Le sens direct est trivial. Montrons la réciproque. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.
D'après Plancherel on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt \\ &= \int_{S'} |\hat{f}(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}\setminus S'} |\hat{f}(t)|^2 dt \\ &= ||F^{-1}(F(f)1_{S'})||_2^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus S'} |\hat{f}(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Or *supp* $F(F^{-1}(F(f)1_{S'})) \subset S'$, par hypothèse on a :

$$\begin{aligned}
||F^{-1}(F(f)1_{S'})||_2^2 &\leqslant D\int_{\mathbb{R}\setminus S}|F^{-1}(F(f)1_{S'})|^2dt \\
&= D\int_{\mathbb{R}\setminus S}|F^{-1}(F(f)(1-1_{(S')^c}))|^2dt \\
&\leqslant 2D(\int_{\mathbb{R}\setminus S}|F^{-1}(F(f))|^2dt + \int_{\mathbb{R}\setminus S}|F^{-1}(F(f)1_{(S')^c})|^2dt) \\
&\leqslant 2D(\int_{\mathbb{R}\setminus S}|f|^2dt + \int_{\mathbb{R}}|F^{-1}(F(f)1_{(S')^c})|^2dt) \\
&= 2D\int_{\mathbb{R}\setminus S}|f(t)|^2dt + 2D\int_{\mathbb{R}\setminus S'}|\hat{f}(t)|^2dt
\end{aligned}$$

Finalement on a l'inégalité voulue avec $C(S,S') = 1 + 2D(S,S')$.

□

4 Mesure de Poisson et inégalité de Jensen

Pour démontrer le théorème de Logvinenko-Sereda, nous aurons besoin de démontrer **une inégalité de Jensen**, dans le cas particulier des fonctions de Hardy, d'abord sur $H^1(\mathbb{T})$ puis sur $H^1(\mathbb{R})$. Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $X = \mathbb{T}$ ou $X = \mathbb{R}$ et $f \in\ H^1(X)$

$$\log|\hat{f}(0)| \leqslant \textstyle\int_{\mathbb{X}} \log|f|dm$$

(i) Inégalité de Jensen dans $H^1(\mathbb{T})$

Définition 16.
Une fonction plus est une distribution tempérée dont le spectre est inclus dans $]0,+\infty[$. On note alors : H^p l'ensemble des fonctions plus de L^p appelé espace de Hardy. Dans toute la suite, $\mathcal{C}_+$ désignera les fonctions plus continues, et $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Enfin, un polynôme trigonométrique réel est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ de la forme : $\forall z \in \mathbb{T}, f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ où les c_k sont réels.

Le but de cette partie est de démontrer **l'inégalité de Jensen** dans $H^1(^{\mathrm{t}})$

◇ Remarque.
Les lemmes suivants permettent de prouver ce théorème en montrant qu'il suffit de le démontrer sur $\mathcal{C}_+$.

Lemme 17.
Pour tout polynôme trigonométrique réel t, il existe un polynôme trigonométrique réel $\tilde{t}$ tel que $t + i\tilde{t} \in \mathcal{C}_+$

Preuve
On considère $\tilde{t}(z) := -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} sgn(k)\hat{t}(k)z^k$ ($z \in \mathbb{T}$). Montrons que $\tilde{t}$ est bien réelle.
D'abord, puisque t est réelle, on sait que $\hat{t}(-k) = \overline{\hat{t}(k)}$. On en déduit alors :

$$-isgn(-k)\hat{t}(-k) = isgn(k)\overline{\hat{t}(k)} = \overline{-isgn(k)\hat{t}(k)}$$

Alors :

$$\tilde{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} -isgn(k)\hat{t}(k)z^k + \sum_{k=1}^{+\infty} -isgn(-k)\widehat{-t}(k)z^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2Re(-isgn(k)\hat{t}(k))z^k$$

d'où $\tilde{t}$ réelle.
On a ensuite de manière évidente le fait que $t+i\tilde{t} \in \mathcal{C}_+$ (par sa construction). $\square$

LEMME 18.
Soient $f,g \in \mathcal{C}_+$.
Alors :

$$\widehat{fg}(0) = \hat{f}(0)\hat{g}(0) \text{ et } \widehat{exp(f)}(0) = exp(\hat{f}(0))$$

Preuve
On a : $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n)e^{int}$ (de même pour g).
Donc :

$$\begin{aligned} fg(t) &= \sum_{n,m} \hat{f}(n)\hat{g}(m)e^{i(n+m)t} \\ &= \sum_{n}(\sum_{k+k'=n} \hat{f}(k)\hat{g}(k'))e^{int} \end{aligned}$$

Or, $\widehat{fg}(n) = \sum_{k+k'=n} \hat{f}(k)\hat{g}(k')$, donc par unicité des coefficients d'une série de Fourier, on a finalement le résultat.
Puis on en déduit : $\widehat{exp(f)}(0) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{(\hat{f}(0))^j}{j!} = exp(\hat{f}(0))$ $\square$

LEMME 19.
Soit f une fonction de $\mathcal{C}_+$. Alors, en notant m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$log|\hat{f}(0)| \leqslant \int_{\mathbb{T}} log|f|dm$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{C}_+$, $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme trigonométrique réel t tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{T},\ t(\xi) - \varepsilon < \log(|f(\xi)| + \varepsilon) < t(\xi) + \varepsilon$$

On considère ensuite $s := t+i\tilde{t}$, où $\tilde{t}$ est le polynôme trigonométrique réel défini dans la démonstration du lemme 16 (qui assure donc $s \in C_+$). Puis :

$$|f(\xi)e^{-s(\xi)}| = |f(\xi)|e^{-t(\xi)} < e^{\log(|f(\xi)|+\varepsilon)-t(\xi)} < e^{\varepsilon}$$

D'où finalement :

$$|\widehat{(fe^{-s})}(0)| = |\int_{\mathbb{T}} fe^{-s}dm| < e^{\varepsilon}$$

Or, d'après le lemme 18 : $|\widehat{(fe^{-s})}(0)| = |\hat{f}(0)||e^{-\hat{s}(0)}| = |\hat{f}(0)|e^{-\hat{t}(0)}$
Donc : $|\hat{f}(0)| \leqslant e^{\varepsilon+\hat{t}(0)} = e^{\varepsilon+\int_{\mathbb{T}} tdm} \leqslant e^{2\varepsilon+\int_{\mathbb{T}}\log(|f|+\varepsilon)}$
D'où, en passant à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$|\hat{f}(0)| \leqslant e^{\int_{\mathbb{T}}\log(|f|)dm}$$

Puis on passe à l'exponentielle qui est croissante, d'où le résultat. □

Théorème 20. Inégalité de Jensen
Soit $f \in H^1(\mathbb{T})$. Alors :

$$\log|\hat{f}(0)| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \log|f|dm$$

Preuve
On se ramène à l'inégalité déjà démontrée sur $\mathcal{C}_+$. Soit $f \in H^1(^{\mathfrak{t}})$. Le théorème de Fejer nous assure l'existence d'une suite de fonctions plus polynomiales $(f_n)_n$ qui converge vers f au sens L^1. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall\varepsilon > 0, |\log(|f| + \varepsilon) - \log(|f_n| + \varepsilon)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||f| - |f_n||$. On en déduit donc :

$$\int_{\mathbb{T}} \log(|f| + \varepsilon)dm = \underset{n\to\infty}{lim} \int_{\mathbb{T}} \log(|f_n| + \varepsilon)dm$$

Puis, les f_n sont dans $\mathcal{C}_+$, on peut donc leur appliquer le lemme 18 :

$$\log(\hat{f}_n(0)) \leqslant \int_{\mathbb{T}} \log(|f_n| + \varepsilon)dm$$

d'où, en passant à la limite :

$$\log(\hat{f}(0)) \leqslant \int_{\mathbb{T}} \log(|f| + \varepsilon)dm$$

Puis, on conclut en utilisant le théorème de convergence monotone (la suite $(\log(|f| + \varepsilon))_{\varepsilon}$ est décroissante et converge vers $\log(|f|)$), d'où le résultat. □

(ii) Inégalité de Jensen dans $H^1(\mathbb{R})$

Définition 21.
La mesure de Poisson sur $\mathbb{R}$ est définit par :
$\Pi := (\pi(1+x^2))^{-1}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de la mesure de probabilité de la loi de Cauchy.

◇ Remarque.
La mesure de Poisson n'est pas stable par translaton.

Lemme 22.
Soit $f \in H^1(\mathbb{R})$. On note $w := \frac{x-i}{x+i}$
A) $\forall a > 0$, $(x + ia)^{-1}f \in H^1(\mathbb{R})$
B) $fw \in H^1(\mathbb{R})$

C) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$
D) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fwd\Pi = 0$
E) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fw^n d\Pi = 0$
F) Si $f \in L^1(\Pi)$ est une fonction plus, alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon := f.(\varepsilon x + i)^{-2} \in H^1(\mathbb{R})$$

(Rappelons que f est dans $H^1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$)
G) L'égalité E) reste vraie pour n'importe quelle fonction plus $f \in L^1(\Pi)$.

Preuve
A)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(t+ia)^{-1}e^{-i\xi t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\frac{1}{i}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\eta a}e^{it\eta}d\eta)e^{-i\xi t}dt$$
$$= \frac{2\pi}{i}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a\eta}\hat{f}(\xi-\eta)d\eta = 0$$

si $\xi < 0$, puisque dans ce cas $\xi - \eta < 0$ (et f est bien dans la classe de Hardy)
B) Il suffit d'écrire $fw = f - 2if(x+i)^{-1}$ et d'exploiter A).
C) $f \in L^1$, donc d'après le théorème 4, $\hat{f}$ est continue. Or, f est une fonction plus, donc $\hat{f}$ est nulle sur $]-\infty,0[$, et donc en 0 par continuité. Or : $\hat{f}(0) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, d'où le résultat.
D) $fw(1+x^2)^{-1} = f.(x+i)^{-2}$. Or, d'après A), ceci appartient à la classe de Hardy. On déduit alors de C) le résultat.
E) Par récurrence, en exploitant B) et D).
F) On a déjà $f_\varepsilon \in L^1(m)$. Il suffit donc de vérifier que *spec* $f_\varepsilon \subset [0,+\infty[$. Tout d'abord, constatons que $[g \in H^1 \Leftrightarrow \forall h \in S(\mathbb{R})$ fonction plus, on a $\langle g,h\rangle = 0]$. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct : soit $h \in S(\mathbb{R})$ fonction plus. Alors : $\langle F^{-1}(F(g)),h\rangle = \langle F(g),F^{-1}(h)\rangle = \langle F(g),F(\check{h})\rangle = 0$ (car les deux fonctions ont des supports disjoints).
Soit $h \in S(\mathbb{R})$ une fonction plus. On a alors :

$$\langle f_\varepsilon,h\rangle_{S'(\mathbb{R}),S(\mathbb{R})} = \langle f, \tfrac{h}{(\varepsilon x+i)^2}\rangle_{S'(\mathbb{R}),S(\mathbb{R})} = 0$$

car $x \mapsto h.(\varepsilon x + i)^{-2}$ est également une fonction plus de $S(\mathbb{R})$ (via A) appliqué deux fois).
G) On constate que $\forall t \in \mathbb{R}$ $|(\varepsilon t + i)^{-2}| \leqslant 1 \in L^1(\Pi)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et utiliser les résultats des propriétés E),

F) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f w^n dP = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon w^n dP = 0$$

□

THÉORÈME 23. **Inégalité de Jensen sur $H^1(\mathbb{R})$**
$\forall f \in L^1(\Pi)$ est une fonction plus, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \log |f| d\Pi \geqslant \log |\int_{\mathbb{R}} f d\Pi|$$

Preuve
L'objectif est de se ramener au résultat du théorème 20 par changement de variable.
Soit $f \in L^1(\Pi)$ une fonction plus. On pose : $F(e^{i\theta}) := f(-cotan(\frac{\theta}{2}))(\theta \in (0{,}2\pi))$ et $x = -cotan(\frac{\theta}{2})$.
On a alors : $x = \frac{-i(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}-1}$ et $d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$. On procède à un changement de variable pour calculer :

$$\int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| d\theta = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty$$

Puis $\hat{F}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} f w^n dP = 0$ (d'après G)).
Ainsi, $F \in H^1(\mathbb{T})$, et on a donc d'après le théorème 20 : $log|\hat{f}(0)| \leqslant \int_{\mathbb{T}} log|f| dm$.
Or, cette inégalité est équivalente à l'inégalité de Jensen de H), par le même changement de variable que précédemment, d'où le résultat. □

5 Théorème de Logvinenko-Sereda

(i) Propriétés de l'opérateur P

Nous démontrons dans cette section deux lemmes, les lemmes 27 et 28 indispensables à la démonstration de Logvinenko-Sereda.

DÉFINITION 24.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit une autre mesure de probabilité Π_x sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\Pi_x(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{dt}{1+(x-t)^2}$.
Soit $f \in L^1(\Pi)$ intégrable pour la mesure de Poisson. On pose

$$P(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f d\Pi_x = \int_{\mathbb{R}} f(x+t) d\Pi(t)$$

◇ REMARQUE.
On a noté P, l'opérateur défini par :

$$\forall \phi \in L^p(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R},\ P(\phi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{dt}{1+(t-x)^2}$$

On remarque que $P(\phi) = \phi * k$ où k est la densité de la loi de Cauchy ($k := \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$).

Théorème 25.
Soit $p \in [1;+\infty)$. On suppose que $S \subset \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable et qu'il existe un réel $\sigma > 0$ tel que $\Pi_x(S) \geqslant \sigma$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).
On a alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$ vérifiant *supp* $\hat{f} \subset \mathbb{R}_+$

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} |P(f)|^p \leqslant 2(\int_S |f|^p)^\sigma ||f||_p^{p(1-\sigma)}.$$

Preuve
On fixe $x \in \mathbb{R}$.

On a f intégrable pour la mesure de Poisson (d'après la remarque précédente et car $k \in L^q$) et *supp* $\hat{f} \subset \mathbb{R}_+$, il en est de même pour la fonction $t \mapsto f(x+t)$. L'inégalité de Jensen assure alors que :

$$\begin{aligned}
\log|P(f)(x)| &= \log(|\int_{\mathbb{R}} f d\Pi_x|) \\
&= \log(|\int_R f(x+t) d\Pi(t)|) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \log|f(x+t)| d\Pi(t) \\
&= P(\log|f|)(x)
\end{aligned}$$

On note $S' := \mathbb{R} \setminus S$, $k := \Pi_x(S)$, $k' = \Pi_x(S')$. On sait que $k > 0$ et on suppose de même pour k' (si $k' = 0$, le résultat est clair). On pose également deux mesures de probabilité μ et μ' définies par $\mu(A) := k^{-1}\Pi_x(A \cap S)$ et $\mu'(A) := k'^{-1}\Pi_x(A \cap S')$.

$$\begin{aligned}
p \times \log|P(f)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \log|f|^p d\Pi_x \\
&= \int_S \log|f|^p d\Pi_x + \int_{S'} \log|f|^p d\Pi_x \\
&= k \int_S \log|f|^p d\mu + k' \int_{S'} \log|f|^p d\mu'
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Jensen pour la fonction log concave et la fonction $|f|^p$ intégrable pour les mesure de probabilité μ et μ'.

$$\begin{aligned}
k \int_S \log(|f|^p) d\mu + k' \int_{S'} \log(|f|^p) d\mu' &\leqslant k \times \log(\int_S |f|^p d\mu) + k' \times \log(\int_{S'} |f|^p d\mu) \\
&= k \times \log(1/k) + k' \times \log(1/k') \\
&\quad + k \times \log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + k' \times log(\int_{S'} |f|^p d\Pi_x))
\end{aligned}$$

On a $k + k' = 1$, de plus, par concavité du log, on a :

$$k \times \log(1/k) + (1-k)\log(1/(1-k)) \leqslant \log(2).$$

Puis :

$$\begin{aligned}
& k \times \log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + k' \times \log(\int_{S'} |f|^p d\Pi_x)) \\
& = \sigma \log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + (k-\sigma)\log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + k' \log(\int_{S'} |f|^p d\Pi_x) \\
& \leqslant \sigma \log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + (k+k'-\sigma)\log(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\Pi_x) \\
& = \sigma \log(\int_S |f|^p d\Pi_x) + (1-\sigma)\log(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\Pi_x)
\end{aligned}$$

Finalement on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|P(f)(x)|^p \leqslant 2(\int_S |f|^p d\Pi_x)^\sigma (\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\Pi_x)^{1-\sigma}$.
On intègre l'inégalité précédente par rapport à x et on applique l'inégalité de Hölder avec les coefficients $1/\sigma \geqslant 1$ et $1/(1-\sigma)$. Puis on utilise Fubini Tonelli.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |P(f)|^p & \leqslant 2(\int_{\mathbb{R}} (\int_S |f(t)| d\Pi_x(t)) dx)^\sigma (\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\Pi_x(t)) dx)^{1-\sigma} \\
& = 2(\int_S (\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dx) d\Pi(t))^\sigma (\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dx) d\Pi_x(t))^{1-\sigma} \\
& = 2(\int_S |f|^p)^\sigma ||f||_p^{p(1-\sigma)}
\end{aligned}$$

□

Lemme 26.

$$\hat{k}(t) = \frac{e^{-|t|}}{\sqrt{2\pi}}$$

Preuve
On pose $g(t) = \frac{e^{-|t|}}{\sqrt{2\pi}} (t \in \mathbb{R})$. On a $g \in L^1$ et on cacule alors $\hat{g}$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|t|}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixt} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} & = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixt} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} + \int_{\mathbb{R}_-} \frac{e^{t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixt} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\
& = [-\frac{e^{-t(1+ix)}}{2\pi(1+ix)}]_0^\infty + [\frac{e^{t(1-ix)}}{2\pi(1-ix)}]_{-\infty}^0 \\
& = \frac{1}{2\pi(1+ix)} + \frac{1}{2\pi(1-ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}
\end{aligned}$$

$g \in L^1$ et $\hat{g} \in L^1$, le théorème d'inversion assure donc que :

$$g(t) = g(-t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \hat{k}(t)$$

□

◇ Remarque.
On remarque alors que $\widehat{P(\phi)}(t) = \widehat{\phi * k}(t) = \sqrt{\pi}\hat{\phi}(t)\hat{k}(t) = \hat{\phi}(t)\frac{e^{-|t|}}{\sqrt{2}}$

Lemme 27.
Si $p \in [1;\infty]$ et $\phi \in L^p$ alors $P(\phi) \in L^p$ et $||P(\phi)||_p \leqslant ||\phi||_p$

Preuve
Par convolution, $P(\phi) \in L^p$. On a $\phi \in L^p$ et $k \in L^1$, d'après le théorème d'Young et comme k est une densité de probabilité, $||P(\phi)||_p \leqslant ||\phi||_p||k||_1 = ||\phi||_p$. □

Lemme 28.
Si $\phi \in L^2$ et que le spectre de ϕ (support de $\hat{\phi}$) est borné et est inclus dans $\mathbb{R}_+$ ($\exists l > 0$ tq *supp* $\hat{\phi} \subset (0;l)$) alors :

$$||\phi||_2 \leqslant e^l||P(\phi)||_2$$

Preuve
$\widehat{P(\phi)}(t) = \hat{\phi}(t)e^{-|t|} = \hat{\phi}(t)e^{-t}$.
Donc $|\hat{\phi}(t)| = e^t|\widehat{P(\phi)}(t)| \leqslant e^l|\widehat{P(\phi)}(t)|$.
Finalement le théorème de Plancherel assure que $||\phi||_2 \leqslant e^l||P(\phi)||_2$. □

(ii) Théorème de Logvinenko-Sereda

Définition 29.
Soit $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R})$, soit S un borélien de $\mathbb{R}$. On dit que S est $\mathcal{E}$-determinant s'il existe un réel positif $C(S,\mathcal{E})$ tel que $\forall f \in \mathcal{E}$, $||f||_2^2 \leqslant C(S,\mathcal{E}) \int_S |f(t)|^2 dt$.
On dit que S est déterminant s'il est $\hat{\mathcal{E}}(\Sigma)$-determinant pour tout ensemble Σ borné où $\hat{\mathcal{E}}(\Sigma)$ est l'ensemble des fonctions de L^2 à spectre dans Σ.

◇ Remarque.
S est déterminant si pour tout ensemble mesurable Σ borné, $(\mathbb{R} \setminus S,\Sigma)$ est une paire fortement annulante.

Définition 30.
$S \subset \mathbb{R}$ est relativement dense
s'il existe $L > 0$ et $\gamma > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(]x - L; x + L[\cap S) \geqslant \gamma$

◇ Remarque.
L'ensemble $\mathbb{R}$ privé d'un nombre finie de boule est relativement dense.

Théorème 31. **Le théorème de Logvinenko-Sereda**
Soit S un Borélien de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :
(a) *S* est déterminant
(b) *S* est relativement dense.

◇ Remarque.
Le théorème de Logvinenko-Sereda donne ainsi une caractérisation des parties S formant une paire fortement annulante avec tout Σ borné.

Preuve $(a) \Rightarrow (b)$
Montrons d'abord la première implication. On suppose donc que $S \subset \mathbb{R}$ est déterminant.
On remarque que pour tout $\Sigma \subset \mathbb{R}$ borné, $\hat{\mathcal{E}}(\Sigma) := \{f \in L^2(\mathbb{R}); supp\ \hat{f} \subset \Sigma\}$ est invariant par translation.
En effet, si $f \in \hat{\mathcal{E}}(\Sigma)$, alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\widehat{f_y(t)} = e^{-iyt}\hat{f}(t)$ et donc $supp\,\widehat{f_y} = supp\,\hat{f} \subset \Sigma$. On peux alors démontrer un résultat un peu plus général, à savoir que si $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset L^2$ invariant par translation, alors tout ensemble $\mathcal{E}$-déterminant est relativement dense.
Soit $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation. Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $||f||_2^2 = 1$. On suppose S $\mathcal{E}$-déterminant. On note $\omega_f(\delta) = sup\{\int_e |f|^2; \lambda(e) \leqslant \delta\}$ et on remarque que $\forall y \in \mathbb{R}, \omega_f(\delta) = \omega_{f_y}(\delta)$.
Comme S est $\mathcal{E}$-déterminant ;

$$\exists\, C(S,\mathcal{E}); \forall g \in \mathcal{E},\ ||g||_2^2 \leqslant C(S,\mathcal{E}) \int_S |g|^2$$

$f \in L^2$ donc $\exists L > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}\setminus]-L;L[} |f|^2 \leqslant 1/2C$.
$\forall y \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}\setminus]-L+y;L+y[} |f_y|^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus]-L;L[} |f|^2 \leqslant 1/2C$
Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 &= ||f||_2^2 = ||f_y||_2^2 \\ &\leqslant C\int_S |f_y|^2 = C\int_{S\cap]-L+y;L+y[} |f_y|^2 + C\int_{S\setminus]-L+y;L+y[} |f_y|^2. \\ &\leqslant C\omega_f(|S\cap]-L+y;L+y[|) + 1/2 \end{aligned}$$

On a donc $\omega_f(|S\cap]-L+y;L+y[|) \geqslant 1/2C(S,\mathcal{E})$. Or $\omega_f(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Finalement $\exists\gamma > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, |S\cap]-L+y;L+y[| \geqslant \gamma$ et S est relativement dense. □

Lemme 32.
Soit $S \subset \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :
(b) S est relativement dense
(c) $inf\{\Pi_x(S) : x \in \mathbb{R}\} > 0$

Preuve $(b) \Leftrightarrow (c)$
On suppose $S \subset \mathbb{R}$ relativement dense.
$\exists L > 0, \exists\gamma > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(]x-L;x+L[\cap S) \geqslant \gamma$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\Pi_x(S) \geqslant \int\limits_{]x-L;x+L[\cap S} d\Pi_x = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{x-L}^{x+L} \chi_S(t)\tfrac{dt}{1+(x-t)^2} \geqslant \pi^{-1}(1+L^2)^{-1}\gamma$$

On suppose que $\exists\sigma > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Pi_x(S) \geqslant \sigma$ (σ indépendant de x).

$$\begin{aligned}
\pi\sigma &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \chi_S(t)\frac{dt}{1+(x-t)^2} \\
&= \int_{x-L}^{x+L} \chi_S(t)\frac{dt}{1+(x-t)^2} + \int_{|x-t|>L} \chi_S(t)\frac{dt}{1+(x-t)^2} \\
&\leqslant |S\cap(x-L;x+l)| + \int_{|t|>L}\frac{dt}{1+t^2} \\
&= |S\cap(x-L;x+l)| + (\pi - 2\arctan(L))
\end{aligned}$$

Si L est assez grand alors $|S\cap(x-L;x+l)| \geqslant \frac{\pi\sigma}{2}$ □

Preuve Réciproque du théorème de Logvinenko-Sereda $(b) \Rightarrow (a)$
On suppose que S est une partie de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurable et que $\Pi_x(S) \geqslant \sigma > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ où σ est indépendant de x. On veux montrer que S est déterminant.
On pose $\Sigma =]a;b[$ et on cherche $D(S,\Sigma)$ tel que $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, *supp* $\hat{f} \subset \Sigma \Rightarrow ||f||_2^2 \leqslant D(S,\Sigma)\int_S |f|^2$.
Soit f $\in L^2(\mathbb{R})$ tel que *supp* $\hat{f} \subset \Sigma$. Transformons f en une fonction à spectre positif. Pour cela on pose $\phi := fexp(-iax)$. $\phi \in L^2$ et *supp* $\hat{\phi} =$ *supp* $\hat{f}_{-a} =$ *supp* $\hat{f} - a \subset]0;b-a[:=]0;l[$.
On peux alors appliquer l'inégalité (lemme 28) $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 \leqslant e^{2l}\int_{\mathbb{R}} |P(\phi)|^2$.
Puis on utilise le théorème 25 appliqué à ϕ.

$$||P(\phi)||_2^2 \leqslant 2(\textstyle\int_S |\phi|^2)^\sigma ||\phi||_2^{2(1-\sigma)} = 2(\int_S |f|^2)^\sigma ||f||_2^{2(1-\sigma)}$$

Finalement en combinant ces deux inégalités on a :

$$||f||_2^2 \leqslant (2e^{2l})^{1/\sigma}\textstyle\int_S |f|^2$$

□

◇ Remarque.
On a montré qu'il suffisait que S forme une paire fortement annulante avec une partie Σ bornée pour être relativement dense.

6 Bibliographie

1. HAVIN Victor, JÖRICKE Burglind - The uncertainty principle in harmonic analysis
2. RUDIN Walter - Analyse réelle et complexe - 3ème édition - Dunod
3. BOUCHERIT Amine - Mémoire Magister : Sur les principes d'incertitudes