Algèbres de Lie et de Kac-Moody

Vers l'infini ... et au-delà ?

Jérôme Milot

École Normale Supérieure de Rennes
Sorbonne Université

10 Février 2023

Objectifs

- Mettre en place les principaux résultats de la théorie des algèbres de Lie semi-simples;
- S'en servir pour créer une généralisation de celles-ci : les algèbres de Kac-Moody.

1. Algèbres de Lie de dimension finie
   - Algèbres de Lie
   - Racines d'une algèbre de Lie
   - Matrice de Cartan
2. Algèbres de Kac-Moody
3. Références

Définition et applications

Définition

Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ satisfaisant l'identité de Jacobi :

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g} : [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

Définition et applications

Définition

Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ satisfaisant l'identité de Jacobi :

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g} : [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

L'intérêt pour les algèbres de Lie est né au milieu du XX^{e} siècle, avec pour principales motivations des applications à la physique, comme le modèle "the eight-fold way" de Gell Mann.

Exemples fondamentaux

- Toute algèbre A munie du crochet du commutateur (i.e. : pour tous $a, b \in A$, $[a, b] = ab - ba$) est une algèbre de Lie.
- L'espace vectoriel $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(H, E, F)$ où

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

muni du crochet du commutateur.
On obtient alors les relations entre générateurs suivantes :

$$[\mathrm{H}, \mathrm{X}] = 2X; \quad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -2Y; \quad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = H.$$

Représentation d'un algèbre de Lie

Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est un couple (V, ρ) où V est un espace vectoriel et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ est une application linéaire satisfaisant :

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : \rho([\mathrm{x}, \mathrm{y}]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

La représentation adjointe

On définit l'application :

$$\mathrm{ad} : \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & (\mathrm{y} \mapsto [\mathrm{x}, \mathrm{y}]) \end{array}.$$

Alors $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ est une représentation, dite *adjointe*, de $\mathfrak{g}$.

1. Algèbres de Lie de dimension finie
   - Algèbres de Lie
   - Racines d'une algèbre de Lie
   - Matrice de Cartan
2. Algèbres de Kac-Moody
3. Références

Algèbre de Cartan

Définition

Une *sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que :

1. $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale ;
2. pour tout $h \in \mathfrak{h}$: $\mathrm{ad}(h) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ agit diagonalement sur $\mathfrak{g}$.

La dimension de $\mathfrak{h}$ est appelée *rang* de $\mathfrak{g}$.

Algèbre de Cartan

Définition

Une *sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que :

1. $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale ;
2. pour tout $h \in \mathfrak{h}$: $\mathrm{ad}(h) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ agit diagonalement sur $\mathfrak{g}$.

La dimension de $\mathfrak{h}$ est appelée *rang* de $\mathfrak{g}$.

Exemple

La droite vectorielle $(\mathrm{Vect}(H), [\ ,\ ])$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (qui est donc de rang 1).

Algèbre de Cartan

Définition

Une *sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que :

1. $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale ;
2. pour tout $h \in \mathfrak{h}$: $\mathrm{ad}(h) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ agit diagonalement sur $\mathfrak{g}$.

La dimension de $\mathfrak{h}$ est appelée *rang* de $\mathfrak{g}$.

Exemple

La droite vectorielle $(\mathrm{Vect}(H), [\ ,\ ])$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (qui est donc de rang 1).

Théorème

Toute algèbre de Lie semi-simple admet une sous-algèbre de Cartan.

Racines

On dipose alors de la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

où $R \subset \mathfrak{h}^*$ et $g^{\alpha} := \{y \in \mathfrak{g} : [h, y] = \alpha(h) y \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$.

Racines

Définition

On appelle R *l'espace des racines* et ses éléments *racines*.
Les espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ sont appelés *espaces de poids*.

Racines

Définition

On appelle R *l'espace des racines* et ses éléments *racines*.
Les espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ sont appelés *espaces de poids*.

Théorème

Soit $n := \dim \mathfrak{h}^*$. On peut choisir n racines dans R qui forment une base de $\mathfrak{h}^*$.

Définition

Ces racines sont appelées *racines simples*.
On note $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble des racines simples.

Racines

Proposition

Soit $\alpha_i \in S$. Alors :

1. Il existe un unique $H_i \in [\mathfrak{g}^{\alpha_i}, \mathfrak{g}^{-\alpha_i}]$ tel que $\alpha_i(H_i) = 2$.
2. Pour tout $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, il existe un unique $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ tel que $[X_i, Y_i] = H_i$.

Relations de Serre-Chevalley

Théorème de Serre

1. Les (α_i) sont linéairement indépendants et pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $\alpha_i(H_j) \leqslant 0$.
2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est générée par les $3n$ éléments $(X_i, Y_i, H_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On les appelle *générateurs de Chevalley*.
3. Les relations de Weyl sont satisfaites :

$$[H_i, H_j] = 0;\ [X_i, Y_j] = \delta_{i,j} H_i;$$

$$[H_i, X_j] = \alpha_j(H_i) X_j;\ [H_i, Y_j] = -\alpha_j(H_i) Y_j.$$

4. Les relations de Serre sont satisfaites :

$$\mathrm{ad}(X_i)^{1-\alpha_j(H_i)}(X_j) = 0;\ \mathrm{ad}(Y_i)^{1-\alpha_j(H_i)}(Y_j) = 0.$$

5. Les relations de Weyl et de Serre forment un système complet de relations.
6. Cette présentation ne dépend d'aucun des choix effectués.

Matrice de Cartan

Définition

La *matrice de Cartan* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de $\mathfrak{g}$ est définie par :

$$C_{i,j} = \alpha_j(H_i).$$

Matrice de Cartan

Définition

La *matrice de Cartan* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de $\mathfrak{g}$ est définie par :

$$C_{i,j} = \alpha_j(H_i).$$

Exemple

Pour $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, la matrice de Cartan associée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Matrice de Cartan généralisée

Définition

Une *matrice de Cartan généralisée* est une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ C_{i,i} = 2;$
2. $\forall i \neq j : \quad C_{i,j} \in -\mathbb{N}, \quad C_{i,j} = 0 \Leftrightarrow C_{j,i} = 0.$

Matrice de Cartan généralisée

Définition

Une *matrice de Cartan généralisée* est une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ C_{i,i} = 2;$
2. $\forall i \neq j : \quad C_{i,j} \in -\mathbb{N}, \quad C_{i,j} = 0 \Leftrightarrow C_{j,i} = 0.$

Exemples

- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, sa matrice de Cartan satisfait ces propriétés. On dit que C est une matrice de type fini.
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de Cartan généralisée.

Remarque

- Une matrice de Cartan généralisée C est de type fini si et seulement si ses mineurs principaux sont tous strictements positifs.
- Une matrice de Cartan généralisée non-inversible et dont tous les mineurs principaux propres sont strictements positifs est dite *affine*.

Remarque

- Une matrice de Cartan généralisée C est de type fini si et seulement si ses mineurs principaux sont tous strictements positifs.
- Une matrice de Cartan généralisée non-inversible et dont tous les mineurs principaux propres sont strictements positifs est dite *affine*.

Exemple de matrices de type affine

- $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Algèbre de Kac-Moody

Définition

Soit C une matrice de Cartan généralisée. Une *réalisation* de C est un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ où :

1. $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que
$$\dim(\mathfrak{h}) = 2n - \mathrm{rg}(C);$$
2. $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ familles libres;
3. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ \alpha_j(\alpha_i^\vee) = C_{i,j}$.

Algèbre de Kac-Moody

Définition

Soit C une matrice de Cartan généralisée. Une *réalisation* de C est un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ où :

1. $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que
$$\dim(\mathfrak{h}) = 2n - \mathrm{rg}(C);$$
2. $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ familles libres;
3. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : \ \alpha_j(\alpha_i^\vee) = C_{i,j}$.

Théorème

Pour tout matrice de Cartan généralisée, il existe une réalisation.

Définition

Soient C une matrice de Cartan généralisée et $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ une réalisation de C. On définit *l'algèbre de Kac-Moody* associée, notée $\mathfrak{g}(C)$, comme l'algèbre de Lie définie par générateurs et relations :

- Les générateurs sont les X_i, Y_i et $\mathfrak{h}$;
- $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne;
- Les générateurs vérifient les relations de Weyl et de Serre (en remplaçant les H_i par les $\alpha_i^\vee$).

Applications

- En physique (théorie conforme des champs) - (via le cas particuliers des algèbres affines);
- Preuves d'identités combinatoires (identités de MacDonald);
- Base des algèbres quantiques (Drinfeld, Jimbo (1985)).

Merci pour votre attention !

1. Algèbres de Lie de dimension finie
2. Algèbres de Kac-Moody
3. Références

[1] H. Samelson, *Notes on Lie Algebras.*
Stanford: Springer-Verlag, 1990.

[2] H. James, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.*
Springer, 1994.

[3] K. Victor, *Infinite-Dimensional Lie Algebras.*
Massachusetts Institute of Technology: Cambridge University Press, 1990.