

Stage 2021 - Structure o-minimale et comptage de points rationnels

Jérôme Milot - Encadré par Georges Comte

I	Ensemble semi-algébrique	2	III	Comptage de points rationnels	23
1	Motivation	2	1	Motivation	23
2	Ensembles semi-algébriques	2	2	Paramétrisation : le théorème de Yomdin-Gromov	24
3	Formules du premier ordre	3	3	Méthode du déterminant de Bombieri	31
II	Structure o-minimale	4	4	Comptage de points rationnels	32
1	Ensembles et fonctions définissables	4	IV	Annexe	36
2	Décomposition cellulaire	6	1	Quelques résultats supplémentaires	36
3	Invariants définissables	17	2	Définissabilité de l'exponentielle	42

Résumé :

Le stage s'est divisé en deux périodes distinctes avec un objectif clair pour chacune. Dans un premier temps, le but est d'introduire les notions élémentaires de géométrie o-minimale et de s'en servir afin de mettre en place des outils et des résultats remarquables, le principal théorème étant celui de décomposition cellulaire.

La deuxième partie du stage porte sur la mise en place de la paramétrisation de Yomdin-Gromov et de son application pour situer les points rationnels d'un ensemble définissable via la méthode du déterminant de Bombieri. L'objectif final de cette partie est la démonstration d'un résultat récent, dû à J. Pila et J. Wilkie, de comptage de points rationnels d'une partie d'un ensemble définissable.

En annexe se trouvent des démonstrations supplémentaires ainsi qu'un résultat remarquable sur la définissabilité de l'exponentielle.

Remerciements :

Je tiens à remercier le LAMA de l'USMB pour leur accueil chaleureux et plus particulièrement Georges Comte pour son encadrement et ces discussions intéressantes - mathématiques ou non. Merci également à Téofil Adamski pour m'avoir accompagné durant ces 2 mois et pour le modèle du fichier Latex.

I Ensemble semi-algèbrique

1 Motivation

On cherche à faire de la géométrie sur des structures stables par projection. La première structure intuitive, celle des ensembles algébriques, ne vérifie pas cette propriété (bien qu'elle soit particulièrement adaptée au travail géométrique). De ce fait, on va essayer de trouver un sur-ensemble de celle-ci qui ne soit pas trop grand pour pouvoir quand même conserver des propriétés géométriques modérées et qui soit tout de même stable par projection, ce qui nous mène aux ensembles semi-algébriques. [1]

2 Ensembles semi-algébriques

DÉFINITION I.2.1 *Ensemble semi-algèbrique*

Un ensemble de points vérifiant simultanément des systèmes d'équations et d'inéquations polynomiales est appelé *ensemble semi-algèbrique*.

L'ensemble des ensembles semi-algébriques, noté \mathcal{SA}_n , est la plus petite classe de parties de \mathbb{R}^n telle que :

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n.$$

2. Si $A, B \in \mathcal{SA}_n$, alors $A \cup B, A \cap B, \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{SA}_n$.

◇ REMARQUE.

Un ensemble semi-algébrique s'écrit donc sous la forme d'une union finie d'ensembles de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0 \text{ avec } P, Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]\}.$$

▷ EXEMPLE.

- Un ensemble algébrique est semi-algébrique.
- Dans \mathbb{R} , un ensemble semi-algébrique est une réunion finie d'intervalles ouverts et de singletons.
- L'image réciproque d'un ensemble semi-algébrique par une fonction polynomiale est semi-algébrique.
- Le produit cartésien de deux ensembles semi-algébriques est un ensemble semi-algébrique.

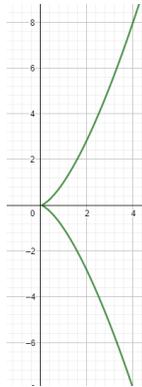


FIGURE 1 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - y^2 = 0\}$

◇ REMARQUE.

- Le point 2. nous assure \mathcal{SA}_n est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
- Les éléments de \mathcal{SA}_1 sont exactement les unions finies d'intervalles ouverts et de points.

DÉFINITION I.2.2 *Fonction semi-algèbrique*

Soient $A \in \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$.

La fonction f est dite *semi-algèbrique* si son graphe $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n+p}$ est semi-algébrique.

THÉORÈME I.2.3 *Tarski-Seidenberg*

On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées.

Si A est un ensemble semi-algébrique, alors $p(A)$ est un ensemble semi-algébrique.

◇ REMARQUE.

Ce résultat n'est pas valable pour les ensembles algébriques : par exemple $\{(x, y) \in \mathbb{R} : xy - 1 = 0\}$ est bien un ensemble algébrique, mais sa projection sur \mathbb{R} est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui n'est pas algébrique (les ensembles algébriques de \mathbb{R} n'étant que \mathbb{R}, \emptyset et les ensembles finis, via le théorème fondamental de l'algèbre).

COROLLAIRE I.2.4

Soit A ensemble semi-algèbrique de \mathbb{R}^m , $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application polynomiale. L'ensemble $f(A)$ est un ensemble semi-algèbrique de \mathbb{R}^n .

Démonstration

On considère l'ensemble :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x \in A \text{ et } y = f(x)\}$$

qui est un ensemble semi-algèbrique de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On constate que sa projection sur \mathbb{R}^n est $f(A)$, d'où le résultat via le théorème de Tarski-Seidenberg. \square

COROLLAIRE I.2.5

L'adhérence et l'intérieur d'un ensemble semi-algèbrique de \mathbb{R}^n sont semi-algèbriques.

Démonstration

L'adhérence de A est par définition :

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : \|x - y\|^2 < \varepsilon^2.\}$$

On peut également l'écrire :

$$\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus (\pi_1(\{(x,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\}) \setminus \pi_2(B))$$

avec

$$B := \{(x,\varepsilon,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : y \in A \text{ et } \|x - y\|^2 < \varepsilon^2\},$$

$\pi_1(x,\varepsilon) = x$ et $\pi_2(x,\varepsilon,y) = (x,\varepsilon)$.

On a donc écrit \overline{A} comme complémentaire d'ensembles semi-algèbriques (en tant que projections complémentaires d'ensembles algèbriques).

Par définition, \overline{A} est semi-algèbrique. On raisonne de façon similaire pour l'intérieur. \square

3 Formules du premier ordre

Le précédent exemple nous montre qu'il peut être laborieux de ne travailler qu'avec des projections pour prouver qu'un ensemble est semi-algèbrique. Afin de faciliter les raisonnements, nous utilisons quelques notions de théorie des modèles : les formules du premier ordre, desquelles nous déduisons une autre forme du théorème de Tarski-Seidenberg.

DÉFINITION I.3.6 *Formule du premier ordre*

Une *formule du premier ordre* (du langage des corps ordonnés à paramètres dans \mathbb{R}) est construite selon les règles suivantes :

1. Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ et $P(x_1, \dots, x_n) > 0$ sont des formules du premier ordre.
2. Si $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ et $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ sont des formules du premier ordre, alors toute opération booléenne sur Φ et Ψ est une formule du premier ordre.
3. Si $\Phi(x,y)$ est une formule du premier ordre et A est un ensemble définissable de \mathbb{R}^n , alors $\exists y \in A : \Phi(x,y)$ et $\forall y \in A : \Phi(x,y)$ sont des formules du premier ordre.

THÉORÈME I.3.7 *Condition suffisante de semi-algèbricité*

Si $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule du premier ordre, alors l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ est semi-algèbrique.

Démonstration

On procède par induction sur la construction des formules. La première règle ne construit que des ensembles semi-algèbriques. La règle 2 ne produit que des ensembles semi-algèbriques à partir d'autres ensembles semi-algèbriques.

Finalement, il nous faut surtout justifier le résultat pour les quantificateurs : une existence sur un ensemble semi-algèbrique peut être perçue comme la projection d'un ensemble semi-algèbrique (et est donc semi-algèbrique), un pour tout sur un ensemble semi-algèbrique peut être perçu comme le complémentaire d'une projection d'un ensemble semi-algèbrique (et est donc semi-algèbrique). \square

◇ REMARQUE.

Ce théorème est équivalent à l'assertion : toute formule du premier ordre est équivalente à une formule sans quantificateurs.

II Structure o-minimale

On peut généraliser l'intuition des ensembles semi-algébriques via la constructions des ensembles définissables sur un corps réel clos. C'est l'objet de cette section, dans laquelle on définit ce qu'est une structure o-minimale [2] en construisant tour à tour ses objets intéressants [3] : les ensembles et fonctions définissables, les cellules et la décomposition cellulaire, les dimensions et la caractéristique d'Euler de ces cellules, et enfin le résultat principal de cette première partie, la caractérisation des ensembles définissablement équivalents.

1 Ensembles et fonctions définissables

Nous commençons par introduire la notion de structure o-minimale généralisant les propriétés énoncées dans la première partie.

DÉFINITION II.1.1 *Corps ordonné*

Un corps *ordonné* est la donnée d'un corps R et d'une relation d'ordre totale \leq sur R tels que pour tous $x, y, z \in R$:

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

et

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \implies xy \geq 0.$$

DÉFINITION II.1.2 *Corps clos*

Un *corps réel clos* R est un corps ordonné vérifiant l'une des assertions équivalentes :

- (i) Tout élément positif de R est un carré et tout polynôme sur R avec un degré impair admet une racine dans R .
- (ii) Pour tout polynôme F sur R et tous $a, b \in R$ tq $a < b$ et $F(a)F(b) < 0$, il existe $c \in R$ tq $a < c < b$ et $F(c) = 0$.
- (iii) $R[\sqrt{-1}] = R[X]/(X^2 + 1)$ est un corps algébriquement clos.

▷ EXEMPLE.

\mathbb{R} est un corps réel clos.

Le sous-corps des réels algébriques $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est un corps réel clos.

DÉFINITION II.1.3 *Structure*

Une *structure* étendant un corps réel clos R est une suite $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où chaque \mathcal{S}^n est un ensemble de sous-ensembles de \mathbb{R}^n , vérifiant :

1. Tous les ensembles algébriques de R^n sont dans \mathcal{S}^n .
 2. Pour tout $n \in \mathbb{N} : A, B \in \mathcal{S}^n \implies A \cup B \in \mathcal{S}^n$ et $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{S}^n$.
 3. Si $A \in \mathcal{S}^m$ et $B \in \mathcal{S}^n$, alors $A \times B \in \mathcal{S}^{n+m}$.
 4. Soit $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Si $A \in \mathcal{S}^{n+1}$, alors $p(A) \in \mathcal{S}^n$.
- Les éléments de \mathcal{S}^n sont appelés *ensembles définissables* de R^n .

DÉFINITION II.1.4 *Structure o-minimale*

Une structure \mathcal{S} est de plus *o-minimale* si elle satisfait :

5. Les éléments de \mathcal{S}^1 sont exactement les unions finies de points et d'intervalles ouverts.

◇ REMARQUE.

- Le "o" de l'o-minimalité provient du mot "ordre". Il s'agit de structures intuitivement minimales pour l'ordre.
- Le point 5. est équivalent au fait que la frontière d'un élément de \mathcal{S}^1 est finie.
- Le terme définissable est un terme emprunté au domaine de la logique, au sein duquel un objet est définissable par rapport à un langage. Dans toute la suite de cette étude, un objet est définissable par rapport à un langage d'une structure o-minimale.

PROPOSITION II.1.5

$(\mathcal{S}\mathcal{A}_n)_n$ est la plus petite structure o-minimale étendant R

Démonstration

Il est déjà clair que $(\mathcal{S}\mathcal{A}_n)_n$ une structure o-minimale, via les définitions et le théorème de Tarski-Seidenberg. Prouvons maintenant que c'est la plus petite. Soit \mathcal{S} une autre structure o-minimale. Les ensembles algébriques étant dedans via 1. et la structure étant une algèbre booléenne, il suffit en fait de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in R[X_1, \dots, X_n]$, l'ensemble

$$A := \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : P(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

est bien dans \mathcal{S}^n .

Pour ce faire, on pose :

$$B := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_{n+1}^2 P(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0\}.$$

Il s'agit d'un ensemble algébrique, donc $B \in \mathcal{S}^n$. Or :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in p(B) &\iff \exists x_{n+1} \in R : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in B \\ &\iff \exists x_{n+1} \in R : x_{n+1}^2 P(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ &\iff \exists x_{n+1} \in R : P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_{n+1}^2} \\ &\iff P(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \in A \end{aligned}$$

d'où $A = p(B) \in \mathcal{S}^n$ via le point 4. de la définition, et donc finalement $\mathcal{SA}_n \subset \mathcal{S}^n$. \(\square\)

◇ REMARQUE.

On constate donc que les structures o-minimales conservent certaines propriétés intéressantes des ensembles semi-algébriques, notamment la stabilité par projection.

Ce qui est également remarquable avec une telle structure, c'est qu'une condition simple sur l'ensemble initial \mathcal{S}^1 induit, via la propriété de projection, des propriétés géométriques modérées pour les autres ensembles \mathcal{S}^n de la collection. Dans la littérature, les structures o-minimales sont parfois décrites comme des "royaumes de la finitude".

Désormais, on travaille toujours dans une structure o-minimale \mathcal{S} étendant un corps réel clos R (moralement, le lecteur pourra considérer qu'il travaille avec \mathbb{R}).

DÉFINITION II.1.6 *Fonction définissable*

Une fonction $f : A \rightarrow R^p$ (avec $A \subset R^n$) est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable de $R^n \times R^p$.

◇ REMARQUE.

En appliquant p fois le point 4. de la définition d'une structure, on déduit que A est également définissable.

▷ EXEMPLE.

- Toute fonction polynomiale à valeurs réelles est évidemment définissable (son graphe est un ensemble algébrique).
- La fonction \cos n'est pas définissable car son graphe intersecte une infinité de fois l'axe des abscisses.

Comme pour les ensembles semi-algébriques, on constate que l'on peut donc montrer plusieurs résultats par le biais des projections, mais cela peut également vite devenir fastidieux. Pour simplifier cela, on introduit une nouvelle notion de formules du premier ordre du langage de la structure o-minimale.

DÉFINITION II.1.7 *Formule du premier ordre*

Une *formule du premier ordre* (du langage de la structure o-minimale) est construite selon les règles suivantes :

1. Si $P \in R[X_1, \dots, X_n]$, alors $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ et $P(x_1, \dots, x_n) > 0$ sont des formules du premier ordre.
2. Si A est un ensemble définissable de R^n , alors $(x_1, \dots, x_n) \in A$ est une formule du premier ordre.
3. Si $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ et $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ sont des formules du premier ordre, alors toute opération booléenne sur Φ et Ψ est une formule du premier ordre.
4. Si $\Phi(x, y)$ est une formule du premier ordre et A est un ensemble définissable de R^n , alors $\exists y \in A : \Phi(x, y)$ et $\forall y \in A : \Phi(x, y)$ sont des formules du premier ordre.

THÉORÈME II.1.8 *Condition suffisante de définissabilité*

Si $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule du premier ordre, alors l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ qui satisfont $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ est définissable.

Démonstration

Analogue au résultat sur la semi-algèbricité I.3.7. \(\square\)

◇ REMARQUE.

Il faut faire attention avec le deuxième point notamment : il faut bien que l'ensemble concerné par la formule soit définissable.

Par exemple, on sait que \mathbb{N} n'est pas définissable (il ne s'agit ni d'une union finie de points, ni d'une union finie d'intervalles de R), et $\{(x, y) \in R^2 : \exists n \in \mathbb{N} : y = nx\}$ non plus (par exemple, son intersection avec la droite $y = 1$ serait définissable, sa projection sur R le serait aussi mais serait infinie sans contenir d'intervalle : impossible).

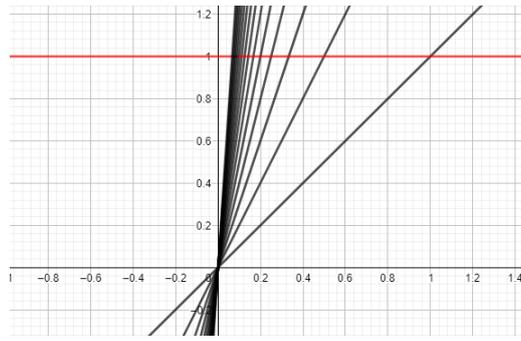


FIGURE 2 – L'ensemble des droites $nx, n \in \mathbb{N}$ n'est pas définissable.

◇ REMARQUE.

On retrouve donc facilement que l'adhérence (et même l'intérieur) d'un ensemble définissable est aussi définissable.

Nous pouvons facilement déduire de ce théorème quelques résultats utiles.

PROPOSITION II.1.9

L'image d'un ensemble définissable par une fonction définissable est définissable.

Démonstration

Soit $g : A \rightarrow R^n$ définissable. $\text{Im}(g) = \{y \in R^n : \exists x \in A : (x,y) \in \Gamma(g)\}$ est donc définissable, en tant qu'ensemble de points satisfaisant une formule du premier ordre.

⊠

COROLLAIRE II.1.10

La composée de deux fonctions définissables est définissable.

LEMME II.1.11

Soit $A \subset R^n, B \subset R^p$ ensembles définissables, soit $f : A \rightarrow B$ définissable.

Alors

$$\Gamma' := \{(y,x) \in R^p \times R^n : (x,y) \in \Gamma\}$$

est définissable.

En particulier, si f est bijective définissable, alors f^{-1} est définissable.

Démonstration

Il s'agit d'une formule du premier ordre.

⊠

◇ REMARQUE.

A l'avenir, si un ensemble est décrit comme définissable sans justification, c'est qu'il l'est via application du théorème II.1.8.

2 Décomposition cellulaire

Maintenant que nous avons mis en place la notion d'ensembles définissables, nous nous heurtons à une difficulté majeure : il s'agit d'une notion abstraite, difficile à manipuler.

Afin de nous ramener à des outils plus usuels, nous allons mettre en place la décomposition en cellules définissables cylindriques. Les cellules, ensembles formant une partition de nos R^n , sont homéomorphes à certains R^d et sont ainsi plus manipulables. [3]

On commence par mettre en place une première description des fonctions définissables sur R via le théorème de monotonie.

THÉORÈME II.2.12 *Monotonie*

Soit $f :]a,b[\rightarrow R$ une fonction définissable.

Il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ telle que sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ f est continue et soit constante, soit strictement monotone.

LEMME II.2.13

Soit $f :]a,b[\rightarrow R$ définissable.

Il existe un sous-intervalle de $]a,b[$ lequel f est constante ou il existe un sous-intervalle de $]a,b[$ sur lequel f est

continue et strictement monotone.

Démonstration du lemme

On suppose qu'il n'existe pas de sous-intervalle de $]a, b[$ sur lequel f est constante. Montrons qu'il en existe un sur lequel f est continue et strictement monotone.

1^{ère} étape : il existe un sous-intervalle de $]a, b[$ sur lequel f est injective.

Soit $y \in R$. Si $f^{-1}(y)$ n'est pas fini, on sait qu'il contient un intervalle puisqu'il s'agit d'un ensemble définissable de R . Cela contredit l'hypothèse, $f^{-1}(y)$ est donc fini.

Nécessairement, $f(]a, b[)$ est infini (sinon $]a, b[$ s'écrirait comme union finie de préimages finies). Or cet ensemble est un définissable de R : à ce titre, il contient un intervalle J . On pose alors :

$$g: \begin{cases} J \longrightarrow]a, b[\\ y \longmapsto \min(f^{-1}(y)) \end{cases}$$

qui est bien défini (puisque $f^{-1}(y)$ est fini pour tout $y \in R$) et définissable. De plus, on a directement $f \circ g = Id|_J$: g est donc injective sur J . Puisque J est infini, on a donc $g(J)$ ensemble définissable de R et infini : à ce titre, l'ensemble contient un certain intervalle $I \subset]a, b[$. Mais alors $g \circ f = Id|_I$, d'où f injective sur I .

2^e étape : il existe un intervalle sur lequel f est strictement monotone.

On travaille sur l'intervalle I obtenu précédemment, sur lequel f est injective. Soit $x \in I$. On définit :

$$I_+ := \{y \in I : f(y) > f(x)\} \text{ et } I_- := \{y \in I : f(y) < f(x)\}.$$

Puisque f est injective sur I , on a $I \setminus \{x\} = I_+ \sqcup I_-$ partition définissable. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x[$ (resp $]x, x + \varepsilon[$) est soit dans I_+ , soit dans I_- (sinon, un des deux ensembles serait une réunion infinie de points ce qui n'est pas possible en tant que définissables de R par o-minimalité).

Ainsi, il y a quatre possibilités que l'on note $\Phi_{++}(x), \Phi_{+-}(x), \Phi_{-+}(x)$ et $\Phi_{--}(x)$. On note Φ_{++} l'ensemble des points x de I tels que $\Phi_{++}(x)$ est vrai (de même pour les autres ensembles). Les Φ forment donc une partition définissable de I (pour tout $x \in I$, une et une seule de ces possibilités est vérifiée). Par exemple, $\Phi_{++}(x)$ signifie :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in I, \quad (x - \varepsilon < y < x \implies f(y) > f(x)) \text{ et } (x < y < x + \varepsilon \implies f(y) > f(x)).$$

On commence par prouver que Φ_{++} et Φ_{--} sont finis. Il suffit de prouver le résultat pour Φ_{++} (on peut en déduire le résultat pour Φ_{--} en l'appliquant à $-f$ qui vérifie les bonnes propriétés également).

Par l'absurde, si Φ_{++} est infini, il contient un intervalle que l'on note également I . On pose alors

$$B := \{x \in I : \forall y \in I, y > x \implies f(y) > f(x)\}.$$

L'ensemble B est également définissable. S'il contient un intervalle, alors f est strictement croissant sur cet intervalle, ce qui contredit Φ_{++} qui est vérifié sur I . Nécessairement, B est fini. On remplace donc I par $]\max(B), +\infty[\cap I$. On a alors :

$$\forall x \in I, \exists y \in I : \quad y > x \text{ et } f(y) < f(x) \tag{*}$$

(l'inégalité étant stricte par injectivité de f sur I). Soit $x \in I$. On pose alors :

$$C_x := \{y \in I : \quad y > x \text{ et } f(y) < f(x)\}.$$

Cet ensemble est donc non-vidé et définissable. De plus, l'ensemble ne peut être fini : sinon, $\max(C_x) \in I$, ce qui contredit (*). Une nouvelle fois, C_x contient un intervalle. On note alors z la borne inf de $\overset{\circ}{C}_x$ qui n'est donc pas vide. On sait que $f > f(x)$ sur $]x, x + \varepsilon[$, donc $x < x + \varepsilon \leq z$. D'autre part, puisque z est le plus grand minorant de l'intérieur de C_x , on sait que $f > f(x)$ sur un $]z - \varepsilon, z[$ et $f < f(x)$ sur un $]z, z + \varepsilon[$. On peut donc définir une nouvelle formule $\Psi_{+-}(z)$:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in I, \forall u \in I \quad (z - \varepsilon < t < z < u < z + \varepsilon \implies f(t) > f(u)).$$

On a donc montré :

$$\forall x \in I, \exists z \in I : \quad (x < z \text{ et } \Psi_{+-}(z)). \tag{**}$$

Ainsi, l'ensemble des éléments de I satisfaisant Ψ_{+-} est définissable non-vidé. De plus, il est infini : sinon, son maximum contredirait (**). Ainsi, cet ensemble contient un intervalle, que l'on note encore I . On a donc Ψ_{+-} vérifiée sur I . On pose alors :

$$h: \begin{cases} -I \longrightarrow R \\ x \longmapsto f(-x) \end{cases}$$

On constate que Φ_{++} est vérifiée pour h sur $-I$. De manière analogue à ce qu'on vient de faire, on a donc un sous-intervalle de $-I$ sur lequel Ψ_{+-} est vérifiée. Mais alors, cela signifie qu'il existe un sous-intervalle de I sur lequel Ψ_{-+} est vérifiée pour f . On a donc exhibé un intervalle sur lequel Ψ_{+-} et Ψ_{-+} sont vérifiées pour f : ce

qui est impossible, d'où Φ_{++} fini (de même pour Φ_{--}).

Ainsi, soit Φ_{+-} , soit Φ_{-+} est infini. Supposons le premier cas par exemple. L'ensemble contient une nouvelle fois un intervalle, que l'on note toujours I de sorte que la formule soit vérifiée partout sur I .

Soit $x \in I$. L'ensemble définissable

$$\{y \in I : y > x \text{ et } f > f(x) \text{ sur }]x, y[\}$$

est non-vide et sa borne supérieure est nécessairement celle de I , sinon Φ_{-+} n'est pas vérifiée en ce point. f est donc strictement croissante sur I . D'où finalement, dans tous les cas : f strictement monotone sur un sous-intervalle I .

3^e étape : il existe un intervalle sur lequel f est continue et strictement monotone.

On travaille toujours sur le I obtenu précédemment, sur lequel f est strictement monotone. $f(I)$ est donc un définissable de R infini et à ce titre il contient un intervalle J . On a alors $f^{-1}(J) =]\inf(f^{-1}(J)), \sup(f^{-1}(J))]$. En remplaçant I par $f^{-1}(J)$, on a donc f strictement monotone et bijective de I dans J . De plus, l'image réciproque de tout intervalle de J est un intervalle de I : f est continue sur I . \square

Démonstration du théorème

On pose $X_{=}$ (resp. $X_{\nearrow}, X_{\searrow}$) l'ensemble définissable des $x \in]a, b[$ tels que f est constante (resp. strictement croissante, strictement décroissante) sur un intervalle contenant x . Le lemme précédent assure alors que l'ensemble définissable

$$]a, b[\setminus (X_{=} \sqcup X_{\nearrow} \sqcup X_{\searrow})$$

est fini (sinon, il contiendrait un intervalle sur lequel il n'existerait pas de sous-intervalle où f est constante ou strictement monotone). On peut donc considérer une subdivision $a = a_0 < \dots < a_k = b$ telle que chaque $]a_i, \dots, a_{i+1}[$ est inclus dans $X_{=}, X_{\nearrow}$ ou X_{\searrow} .

Si par exemple l'intervalle est contenu dans $X_{=}$, on considère l'ensemble définissable non-vide

$$D_x := \{y \in]a_i, a_{i+1}[: x < y \text{ et } f = f(x) \text{ sur }]x, y[\}.$$

Si la borne supérieure z de cet ensemble n'est pas a_{i+1} , alors il existe un intervalle $]z - \varepsilon, z + \varepsilon[$ autour de ce point sur lequel f serait constante. En particulier,

$$\forall t \in]x, z[, u \in]z, z + \varepsilon[: f(x) = f(t) = f(z) = f(u).$$

Cela contredit la maximalité de z . Nécessairement, f est constante sur $]a_i, a_{i+1}[$ (les autres cas se traitent exactement de la même façon). \square

DÉFINITION II.2.14 *Décomposition en cellule définissable cylindrique (dcdc)*

Un dcdc de R^n est une partition finie de R^n en des ensembles définissables $(C_i)_{i \in I}$, appelées *cellules de la dcdc*, que l'on construit de manière inductive sur n :

$n = 1$ Une dcdc de R est la donnée d'une subdivision finie $a_1 < \dots < a_l$ de R . Les cellules de R sont les singletons $\{a_i\}_i$ et les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq l$ où $a_0 = -\infty$ et $a_{l+1} = +\infty$

$n \geq 1$ Une dcdc de R^n s'obtient à partir d'une dcdc de R^{n-1} et, pour chaque cellule D de R^{n-1} , de fonctions définissables continues :

$$\zeta_{D,1} < \dots < \zeta_{D,l(D)} : D \rightarrow R$$

Les cellules de R^n sont alors :

- les graphes $\{(x, \zeta_{D,i}(x)) : x \in D\}$ pour $0 < i \leq l(D)$
 - les bandes $(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1}) := \{(x, y) : x \in D, \zeta_{D,i}(x) < y < \zeta_{D,i+1}(x)\}$ pour $0 \leq i \leq l(D)$
- où les fonctions $\zeta_{D,0}$ et $\zeta_{D,l(D)}$ sont les fonctions constantes égales à $-\infty$ et $+\infty$.

Pour que cette construction soit plus visuelle dans nos notations, on associe à une cellule de R^n un n -uplet définit comme suit :

$n = 1$ Si la cellule est un singleton, on dit que c'est une (0)-cellule, si c'est un intervalle, on dit que c'est une (1)-cellule.

$n \geq 1$ Soit D est une (i_1, \dots, i_{n-1}) -cellule. Si C est un graphe au-dessus de D , on dit que c'est une $(i_1, \dots, i_{n-1}, 0)$ -cellule. Si c'est une bande, on dit que c'est une $(i_1, \dots, i_{n-1}, 1)$ -cellule.

◇ REMARQUE.

- Les cellules sont définissables.
- Les projections sur les $n - 1$ premières coordonnées des cellule de R^n sont exactement les cellules de R^{n-1} .
- On constate que le théorème de monotonocité est en réalité un théorème décrivant le comportement d'une fonction définissable sur R sur une certaine dcdc.

▷ EXEMPLE.

Les pavés ouverts sont des cellules de R^n (on les obtient à partir d'intervalles ouverts, puis via la construction des bandes).

DÉFINITION II.2.15 *Dimension d'une cellule*

La *dimension* d'une cellule C de R^n , notée $\dim(C)$, est définie par induction sur n comme suit :

- 0 pour un singleton et 1 pour un intervalle ($n = 1$)
 - $\dim(p(C))$ pour un graphe et $\dim(p(C)) + 1$ pour une bande ($n > 1$)
- où $p : R^n \rightarrow R^{n-1}$ projections sur les $n - 1$ premières coordonnées.

◇ REMARQUE.

On peut aussi le voir ainsi : si C est une (i_1, \dots, i_n) -cellule, alors C est de dimension $i_1 + \dots + i_n$. Ainsi, une cellule de R^n est de dimension $\leq n$.

▷ EXEMPLE.

Les cellules ouvertes de R^n sont exactement les cellules de dimension n .

Démonstration

Par induction sur n , en utilisant le fait que les projections sont des applications ouvertes pour la topologie produit. ⊠

THÉORÈME II.2.16 *Identification cellulaire*

Pour toute cellule C d'une dcdc de R^n , il existe un homéomorphisme définissable

$$\theta_C : C \rightarrow R^{\dim(C)}$$

◇ REMARQUE.

Le nom de théorème d'identification cellulaire n'est pas canonique, je l'ai choisi pour pouvoir y faire référence de manière plus simple dans la suite.

Démonstration On procède par induction sur n .

L'initialisation est claire : un singleton est homéomorphe à R^0 et un intervalle est homéomorphe à R , de la même façon que dans \mathbb{R} , avec homéomorphismes définissables en considérant

$$\Phi : \left| \begin{array}{l}] - 1, 1[\longrightarrow R \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

et

$$\Psi : \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow R \\ x \longmapsto x - \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

et leurs variations par translations. Soit $p : R^n \rightarrow R^{n-1}$ projection. On note $D := p(C)$. D est donc une cellule et par hypothèse, il existe $\theta_D : D \rightarrow R^{\dim(C)}$ homéomorphisme définissable.

Soit $(x, y) \in C$ avec $x \in D$.

Si C est un graphe

Alors $\dim(C) = \dim(D)$, et donc $\theta_C : (x, y) \mapsto \theta_D(x)$ convient.

Si C est une bande (f, g)

Si f, g sont finis, il suffit de considérer :

$$\theta_C : \left| \begin{array}{l} C \longrightarrow R^{\dim(C)} \\ (x, x_n) \longmapsto \left(\theta_D(x), \Phi \left(\frac{2x_n}{g(x) - f(x)} - 1 \right) \right) \end{array} \right.$$

Si f est infinie et g finie, il suffit de considérer :

$$\theta_C : \left| \begin{array}{l} C \longrightarrow R^{\dim(C)} \\ (x, x_n) \longmapsto (\theta_D(x), \Psi(x_n - g(x))) \end{array} \right.$$

De même si g est infinie et f finie.

Enfin, si f et g sont infinies, il suffit de considérer :

$$\theta_C : \left| \begin{array}{l} C \longrightarrow R^{\dim(C)} \\ (x, x_n) \longmapsto (\theta_D(x), x_n) \end{array} \right.$$

DÉFINITION II.2.17 *Ensemble définissablement connexe*

Un ensemble définissable A est dit *définissablement connexe* si pour tous sous-ensembles définissables disjoints U et V de A , on a

$$A = U \cup V \implies (A = U \text{ ou } A = V).$$

Un ensemble définissable A est dit *définissablement connexe par arcs* si, pour tout $a, b \in A$, il existe une fonction continue définissable $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

◇ REMARQUE.

- La connexité par arcs définissable implique la connexité définissable.
- La connexité classique implique la connexité définissable.
- La connexité par arcs définissable implique la connexité par arcs.

PROPOSITION II.2.18

Chaque cellule d'une dcdc est définissablement connexe par arcs.
En particulier, chaque cellule d'un dcdc est définissablement connexe.

Démonstration

Toujours par induction. Le cas $n = 1$ est évident, une cellule étant un point ou un intervalle ouvert et une fonction linéaire étant semi-algébrique (donc définissable).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une dcdc de R^n . Soit C une cellule. On considère $D := p(C)$ qui est donc une cellule de R^{n-1} pour la même dcdc. Par hypothèse de récurrence, on a donc D définissablement connexe par arcs : pour tout $a, b \in C$, il existe donc $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow D$ continue définissable telle que $\gamma_0(0) = p(a)$ et $\gamma_0(1) = p(b)$.

Supposons que C est un graphe. Ainsi, il existe $f : D \rightarrow R$ continue définissable telle que $C = \Gamma(f)$. Il suffit alors de considérer le chemin continu définissable dans C suivant pour obtenir le résultat :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow C \\ t \longmapsto (\gamma_0(t), f(\gamma_0(t))) \end{cases}.$$

Supposons que C est une bande. Ainsi, il existe $f, g : D \rightarrow R$ continues définissables telles que $C = \{(x, y) : x \in D \text{ et } f < y < g\}$.

On pose $h := \frac{1}{2}(f + g)$. On considère alors :

$$\alpha : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow C \\ t \longmapsto (1-t)a + t(p(a), h(p(a))) \end{cases}$$

$$\beta : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow C \\ t \longmapsto (tb + (1-t)(p(b), h(p(b)))) \end{cases}$$

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow C \\ t \longmapsto (\gamma_0(t), h(\gamma_0(t))) \end{cases}.$$

Ainsi : α est un chemin définissable dans A reliant a et $(p(a), h(p(a)))$, γ est un chemin définissable dans A reliant $(p(a), h(p(a)))$ et $(p(b), h(p(b)))$ et β est un chemin définissable dans A reliant $(p(b), h(p(b)))$ et b .

En concaténant ces trois chemins, on reste bien dans A , la concaténation reste un chemin définissable, d'où le résultat. ⊠

Nous nous intéressons aux trois résultats principaux de cette section desquels découleront beaucoup de propriétés remarquables.

THÉORÈME II.2.19 *Finitude uniforme FU_n*

Si A est un ensemble définissable de $R^n + 1$ tel que

$$\forall x \in R^n : A_x := \{y \in R : (x, y) \in A\}$$

est fini, alors : $\exists k \in \mathbb{N} : \forall x \in R^{n-1}, \#A_x \leq k$.

◇ REMARQUE.

- Ce théorème est primordial : il justifie (avec les résultats qui en découlent) l'appellation "royaume de la finitude" de la géométrie o-minimale.
- Les A_x sont appelées *fibres* de A (nous reviendrons plus en détail sur cette notion plus tard). Le théorème dit donc que si toutes les fibres de A sont finies, alors on peut majorer par un entier la taille de chaque fibre (le nombre de fibres pouvant être infini, ce n'est pas évident du tout!).

THÉORÈME II.2.20 *Décomposition cellulaire* DC_n

Soit A_1, \dots, A_k des ensembles définissables de R^n .

Il existe une dcdc de R^n telle que chaque A_i soit une union de cellules.

Une telle dcdc est dite *adaptée* à A_1, \dots, A_k .

▷ EXEMPLE.

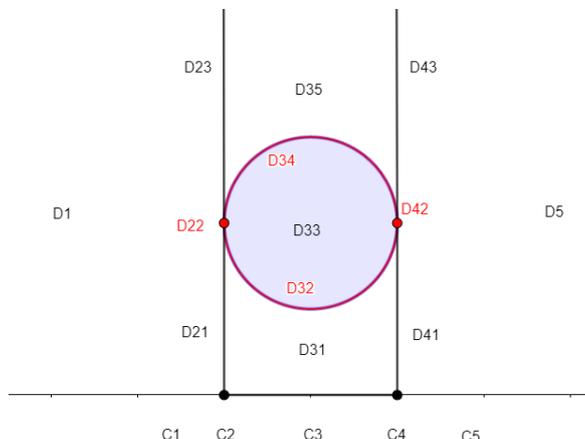


FIGURE 3 – Dcdc de R^2 adaptée à la boule unité

◇ REMARQUE.

Ce théorème est certainement le plus remarquable de cette section : il signifie que tout ensemble définissable peut être partitionné en un nombre fini de cellules, sur lesquelles les résultats peuvent être plus simples à montrer.

THÉORÈME II.2.21 *Continuité par morceaux* CPM_n

Soit A un ensemble définissable de R^n et $f : A \rightarrow R$ une fonction définissable.

Alors il existe une dcdc de R^n adaptée à A telle que pour toute cellule $C \subset A$, $f|_C$ est continue.

◇ REMARQUE.

Ce théorème est également important, puisqu'il permet de ramener une fonction définissable à une fonction définissable continue en l'étudiant sur une cellule issue de ce théorème.

Par ailleurs, on constate que le théorème de monotonie est en réalité le cas particulier $n = 1$ de ce théorème.

Nous allons raisonner par une récurrence sur n sur les trois résultats simultanément. Nous encourageons le lecteur à faire des dessins (autre que ceux introduits ici), le raisonnement étant très visuel.

Démonstration On procède par récurrence sur n .

Le cas $n = 0$ est trivial. Le cas $n = 1$ est presque trivial : DC_1 est vrai via le point 5) d'o-minimalité et CPM_1 est exactement le théorème de monotonie. Il nous manque donc le résultat pour FU_1 . Prouvons-le.

Soit $A \subset R^2$ définissable. On suppose que chaque fibre $A_x = \{y \in R : (x,y) \in A\}$ est de cardinal fini. On va montrer qu'il existe un même majorant pour l'ensemble des cardinaux de ces fibres.

On commence par une définition : on dit qu'un point $(a,b) \in R^2$ est dit *normal* par rapport à A s'il n'appartient pas à A ou s'il existe deux intervalles I et J tels que $A \cap (I \times J) = \Gamma(f)$ pour une fonction $f : I \rightarrow R$ continue (auquel cas f est unique et définissable). On constate immédiatement que l'ensemble des points normaux est définissable.

Ensuite, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $A(n) := \{x \in R : \#A_x \geq n\}$ et $f_n : A(n) \rightarrow R$ qui associe à x le n -ième élément de fibre (en la rangeant par ordre croissant). Les $A(n)$ sont définissables (on s'est débarrassé du problème d'indexation sur \mathbb{N}). De plus, on constate que $\Gamma(f_1) = \{(x,y) \in A : (x,z) \in A \implies y < z\}$: f_1 est donc définissable (car A l'est). On raisonne de même pour les autres fonctions, en retranchant successivement les graphes des fonctions précédentes à A .

On définit maintenant l'ensemble \mathcal{B} des points qui sont dits bons. A un point $a \in R$ est associé un unique entier n_a tel qu'il existe un voisinage de a sur lequel chaque fonction f_i ($1 \leq i \leq n_a$) est défini et continue. On dit que a est un bon point s'il n'appartient pas à l'adhérence de f_{n_a+1} (et on note $a \in \mathcal{B}$). On note \mathcal{M} l'ensemble des mauvais points, qui sont les points qui ne sont pas bons, *i. e.* :

$$\mathcal{B} := \{a \in R : a \notin \overline{A(n_a + 1)}\} \text{ et } \mathcal{M} := \{a \in R : a \in \overline{A(n_a + 1)}\}.$$

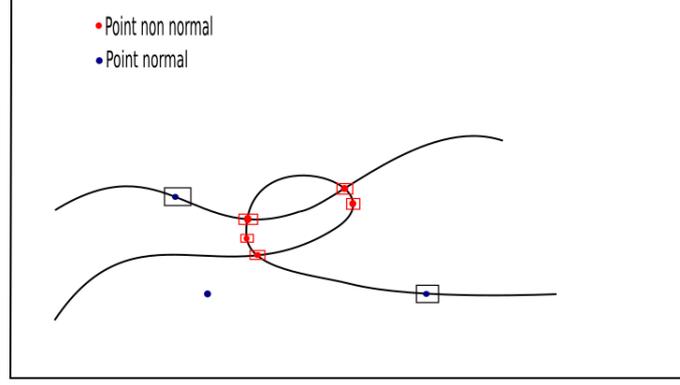


FIGURE 4 – Exemples de points normaux et non normaux

Cependant, ces ensembles dépendent de n_a qui semble être indexé sur \mathbb{N} : on ne peut pas affirmer qu'il s'agit d'un ensemble définissable en tant que formule du premier ordre comme on le fait toujours. On procède donc autrement. On commence avec plusieurs constats, pour $a \in \mathcal{B}$:

- puisque $a \notin \overline{A(n_a + 1)}$, il existe un intervalle ouvert I autour de a sur lequel la fonction $x \mapsto \#A_x$ est constante (égale à n_a).
- soit $b \in R$. Si $(a, b) \in A$, alors $b \in A_a$ et donc $b = \Gamma(f_{i|I})$ pour un certain $i \leq n_a$. En d'autres termes : si $a \in \mathcal{B}$, alors (a, b) est normal. Puisque l'ensemble des points normaux est un ensemble définissable, on va essayer de caractériser l'ensemble des bons points (et donc des mauvais) par rapport à l'ensemble des points normaux. Pour cela, montrons que si $a \in \mathcal{M}$, alors il existe un $b \in R$ tel que (a, b) n'est pas normal.

On pose :

$$l^-(a) = \lim_{x \uparrow a} f_{n_a+1}(x) \text{ ou } +\infty \text{ si } f_{n_a+1} \text{ n'est pas définie sur un intervalle }]t, a[,$$

$$l^+(a) = \lim_{x \downarrow a} f_{n_a}(x) \text{ ou } +\infty \text{ si } f_{n_a} \text{ n'est pas définie sur un intervalle }]a, t[,$$

$$l(a) = f_{n_a+1}(a) \text{ si } a \in \mathcal{A}(n_a + 1), +\infty \text{ sinon.}$$

On pose ensuite $b(a) := \min(l^+(a), l^-(a), l(a))$. On voit alors que $(a, b(a))$ n'est pas simple. En fait, $b(a)$ est le plus petit $y \in R$ tel que (a, y) n'est pas simple. On a donc prouvé :

$$a \in \mathcal{B} \iff \forall b \in R : (a, b) \text{ n'est pas simple.}$$

Cette fois-ci, on constate que \mathcal{B} est bien un ensemble définissable de R (de même pour \mathcal{M}).

- Si \mathcal{M} est fini : $\mathcal{M} = \{a_1, \dots, a_k\}$. Les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ ne sont donc composés que de bons points : d'après ce qui précède, on sait donc que les fonctions $x \mapsto \#A_x$ sont localement constantes sur chacun de ces intervalles. Puisqu'un intervalle est connexe, on a donc finalement $x \mapsto \#A_x$ constante sur chaque intervalle : on peut considérer le max, ce qui donne la borne uniforme recherchée.

- Si \mathcal{M} est infini : nous allons montrer que ce cas n'est pas possible. Pour chaque $a \in \mathcal{M}$, on considère $b(a)$ défini comme précédemment (le plus petit $y \in R$ tel que (a, y) n'est pas normal). On pose alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_- &:= \{a \in \mathcal{M} : \exists y \in R : y < b(a) \text{ et } (a, y) \in A\} \\ \mathcal{M}_+ &:= \{a \in \mathcal{M} : \exists y \in R : y > b(a) \text{ et } (a, y) \in A\} \\ b(a)_- &:= \{y \in R : y < b(a) \text{ et } (a, y) \in A\} \\ b(a)_+ &:= \{y \in R : y > b(a) \text{ et } (a, y) \in A\} \end{aligned}$$

On constate que $\mathcal{M}_+ \setminus \mathcal{M}_-$, $\mathcal{M}_- \setminus \mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$ et $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-$ forment une partition définissable de \mathcal{M} . \mathcal{M} étant infini, il y a nécessairement un de ces ensembles qui est également infini et qui contient un certain intervalle J . D'après le théorème de monotonocité, les fonctions b, b_-, b_+ (qui sont bien définissables) sont continues sur un certain intervalle (quitte à appliquer plusieurs fois le théorème) que l'on note toujours J . On a alors la partition définissable :

$$J = \{x \in J : (x, b(x)) \in A\} \sqcup \{x \in J : (x, b(x)) \notin A\}.$$

Au moins l'un de ces deux ensembles contient donc un intervalle K . Mais alors, on a soit $\Gamma(b|_K) \subset A$ ou $\Gamma(b|_K) \cap A = \emptyset$: autrement dit, pour $x \in K$, on a $(x, b(x))$ point normal : ceci est impossible par construction de $b(x)$.

Finalement, les points mauvais sont en nombre fini et FU_1 est vérifiée.

On peut donc passer à l'hérédité. On suppose FU_n, DC_n et CPM_n pour un $n \in \mathbb{N}$. Commençons par montrer FU_{n+1} .

On généralise la notion de bons points : un pavé $P \subset R^n$ est dit A -bon si pour chaque $(x, r) \in A$, avec $x \in P$, il existe un intervalle I autour de r tel que $A \cap (P \times I) = \Gamma(f)$ pour une certaine fonction $f : P \rightarrow R$ continue (qui, comme précédemment, est unique et définissable). Un point $x \in R^n$ est dit A -bon s'il appartient à un pavé A -bon.

Soit P un pavé A -bon. Montrons qu'il existe des fonctions définissables $f_1 < \dots < f_k : P \rightarrow R$ continues telles que $A \cap (P \times R) = \Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k)$.

Soit $x \in P$. On écrit la fibre associée (qui est finie par hypothèse) $A_x = \{r_1, \dots, r_k\}$ avec $r_1 < \dots < r_k$. On note I_1, \dots, I_k les intervalles autour des r_i et f_1, \dots, f_k les fonctions continues sur P telles que $A \cap (P \times I_j) = \Gamma(f_j)$. On cherche d'abord à prouver que l'ensemble des points A -bons est définissable (et donc son complémentaire également).

1^{ère} affirmation : $f_1 < \dots < f_k$

On se contente de prouver $f_1 < f_2$, les autres inégalités découlant de raisonnements similaires. Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in P$ tel que $f_1(p) = f_2(p)$. On a donc $f_2(p) \in I_1$. Par continuité de f_2 , il existe donc un voisinage U de p dans P tel que $f_2(U) \subset I_1$. Ainsi, on a $f_1(U) = f_2(U)$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{y \in P : f_1(y) = f_2(y)\}$ est ouvert non-vide. Par ailleurs, on sait que les ensembles $\{y \in P : f_1(y) < f_2(y)\}$ et $\{y \in P : f_1(y) > f_2(y)\}$ sont également ouverts. On a donc une partition finie du pavé P en ensembles ouverts. Or P est définissablement connexe, donc deux de ces ensembles sont vides. Or $p \in \{y \in P : f_1(y) = f_2(y)\}$ et $x \in \{y \in P : f_1(y) < f_2(y)\}$: c'est impossible. Nécessairement : $P = \{y \in P : f_1(y) < f_2(y)\}$, d'où le résultat.

2^{ème} affirmation : $A \cap (P \times R) = \Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k)$.

Soit $(x, r) \in A \cap (P \times R)$. D'après le théorème du choix définissable II.2.23, il existe $f : P \rightarrow R$ continue définissable telle que $f(x) = r$ et $\Gamma(f) \subset A$. Ainsi, on a $f(x) \in A_x$, donc il existe un i tel que $f(x) = r_i = f_i(x)$. En appliquant le même raisonnement que précédemment (l'argument de connexité), on trouve $f = f_i$, d'où $(x, r) \in \Gamma(f_i)$. On a donc l'inclusion directe, et donc le résultat (l'inclusion réciproque étant évidente).

Ceci nous montre donc que l'ensemble des points A -bons est définissable.

3^{ème} affirmation : tout pavé ouvert de R^n contient au moins un bon point.

Soit $P = P' \times]a, b[$ pavé de R^n . Pour $p \in P'$, on pose :

$$A_{(p)} := \{(q, y) \in]a, b[\times R : (p, q, y) \in A\}.$$

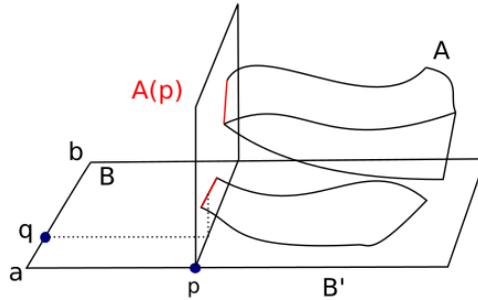


FIGURE 5 – Résumé de la situation

Pour tout $q \in]a, b[$, on sait par hypothèse que la fibre $(A_{(p)})_q$ est finie. Ainsi, d'après FU_1 et le théorème de monotonie appliqué aux f_i , il n'existe qu'un nombre fini de points qui ne sont pas $A_{(p)}$ -bons (on peut dire qu'ils sont $A_{(p)}$ -mauvais). Ainsi, l'ensemble définissable

$$\mathcal{M}(A) = \{(p, q) \in P : q \text{ est } A_{(p)}\text{-mauvais}\}$$

est nécessairement d'intérieur vide (sinon, il contient une cellule ouverte, donc une cellule de dimension n , ce qui n'est pas possible s'il est fini). Par DC_n , on sait qu'il existe une décomposition cellulaire de R^n adaptée à P et $\mathcal{M}(A)$. Nécessairement, aucune des cellules ouvertes de cette décomposition ne rencontre $\mathcal{M}(A)$ (sinon, $\mathcal{M}(A)$ n'est pas d'intérieur vide). Quitte à se restreindre à une de ces cellules (ou à un pavé à l'intérieur), on peut supposer que pour tous les $(p, q) \in P$, on a q $A_{(p)}$ -bon point. On a donc, en appliquant le résultat de la deuxième affirmation à $\{p\} \times]a, b[$ et $A_{(p)}$, que pour tout $p \in P'$, il existe $k(p) \in \mathbb{N}$ tel que $\#A_x = k(p)$ pour tout $x = (p, q), q \in]a, b[$. Montrons que la famille $(k(p))_{p \in P'}$ est bornée.

Cette fois, on fixe $q \in]a, b[$. On sait donc que la fibre de $Y_{(q)} := \{(p, x) \in P' \times R : (p, q, x) \in P\}$ au-dessus de chaque $p \in P'$ est fini. Ainsi, par FU_n , on a : il existe $n(q) \in \mathbb{N}$ tel que $\#\{x \in R : (p, q, x) \in A\} \leq n(q)$. On a donc pour tout $p \in P' : k(p) \leq n(q)$, d'où le résultat. On note N cette borne.

Ainsi, on sait que les $B_i := \{x \in B : \#A_x = i\}$ sont en nombre fini, de même pour les fonctions $f_{i,j} : B_i \rightarrow R$ telle que $f_{i,j}(x)$ est le j -ième élément de la fibre de B_i au-dessus de x . D'après DC_n et CPM_n , il existe une décomposition cellulaire adaptée à chaque B_i , telle que les $f_{i,j}$ sont continues sur chaque cellule. De plus, puisque B est ouvert, on sait qu'il y a nécessairement une cellule ouverte dans notre décomposition. Les B_i formant une partition finie de B , cette cellule est incluse dans un certain B_k . Mais alors, les fonctions $f_{k,1}, \dots, f_{k,n(k)}$ sont continues sur cette cellule. Ainsi, chaque point de cette cellule ouverte sont des A -bons points : notre pavé contient donc bien un A -bon point.

On considère donc maintenant une dcdc de R^n adaptée à l'ensemble des A -bons points (qui est bien définissable). Soit A une cellule de cette décomposition. Si elle est ouverte, on sait d'après l'affirmation précédente qu'elle contient au moins un A -bon point. On en déduit qu'elle ne contient que des A -bons points, et on en conclut, via la première affirmation, que ses fibres sont uniformément bornées.

Si la cellule n'est pas ouverte, on sait qu'elle est définissablement homéomorphe à une cellule ouverte de R^m pour un certain $m < n$ (théorème d'identification cellulaire II.2.16). En constatant que les arguments précédents demeurent valables à homéomorphisme définissable près (notamment la connexité), on déduit également le résultat pour les cellules ouvertes, ce qui clot la démonstration de FU_{n+1} .

On suppose toujours FU_n, DC_n et CPM_n pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrons DC_{n+1}

Soit A_1, \dots, A_k ensembles définissables de R^{n+1} . Montrons qu'il existe une dcdc de R^{n+1} adaptée aux A_i . On pose $\partial S = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$. Si S est un ensemble définissable de R , on a donc que ∂S est un ensemble fini de points. De plus, les intervalles entre ces points sont soit dans S , soit dans son complémentaire. On pose :

$$Y := \{(x, y) \in R^n \times R : y \in \partial(A_1)_x \cup \dots \cup \partial(A_k)_x\}.$$

Ainsi, pour tout $x \in R^n$, on a Y_x qui est fini (union fini d'ensembles finis d'après la remarque précédente). Ainsi, d'après FU_{n+1} : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in R^n$, $\#Y_x \leq N$. On a donc une nouvelle fois que les $B_i := \{x \in R^n : \#A_x = i\}$ sont en nombre fini. Soient $-\infty = \xi_{i,0} < \xi_{i,1} < \dots < \xi_{i,i} < \xi_{i,i+1} = +\infty$ les fonctions sur $B(i)$ telles que $Y_x = \{\xi_{i,1}(x), \dots, \xi_{i,i}(x)\}$. On pose alors, pour tous $k \in \{1, \dots, l\}, i \in \{0, \dots, N\}$ et $j \in \{1, \dots, i\}$:

$$\begin{aligned} C_{k,i,j} &:= \{x \in B_i : \xi_{i,j}(x) \in (A_k)_x\} \\ D_{k,i,j} &:= \{x \in B_i :]\xi_{i,j}(x), \xi_{i,j+1}(x)[\in (A_k)_x\}. \end{aligned}$$

Puis, on sait par DC_n et CPM_n qu'il existe une dcdc de R^n adaptée aux $C_{k,i,j}$ et aux $D_{k,i,j}$ et dont les restrictions des $\xi_{i,j}$ sur les cellules contenues dans B_i sont continues. On construit alors au-dessus de chacune de ces cellules :

$$D' := \{]\xi_{i,0|D}, \xi_{i,1|D}[, \dots,]\xi_{i,i|D}, \xi_{i,i+1|D}[, \Gamma(\xi_{i,1|D}), \dots, \Gamma(\xi_{i,i|D})\}$$

L'union de ces cellules forme une décomposition de R^{n+1} adaptée aux A_i , d'où DC_{n+1} .

Enfin, montrons CPM_{n+1} . Soit A définissable de R^{n+1} et $f : A \rightarrow R$ définissable. Via DC_{n+1} , on peut supposer que A est une cellule.

Premier cas : A est une cellule ouverte.

On commence par montrer un petit résultat : pour $f : R^n \times R \rightarrow R$ telle que à $x \in R^n$ fixé, $f(x, \cdot)$ est continue et monotone sur R et à $r \in R$ fixé, $f(\cdot, r)$ est continue, on a f continue.

En effet : soit $(x, r) \in R^{n+1}$ et J intervalle ouvert de R . Puisque $f(x, \cdot)$ est continue, on peut considérer un intervalle $I =]a, b[$ contenant r tel que $f(x, I) \subset J$. De même, on peut considérer un voisinage U de x tel que $f(U, a) \subset J$ et $f(U, b) \subset J$. On a alors par monotonie de $f(x, \cdot)$: $f(U \times I) \subset J$, d'où f continue.

On introduit ensuite la notion de point \mathcal{C} -régulier : il s'agit d'un $(x, r) \in A \subset R^n \times R$ tel qu'il existe un pavé ouvert $P \in R^n$ contenant x et un intervalle $]a, b[$ contenant r tels que $P \times]a, b[\subset A$, à $x \in P$ fixé, $f(x, \cdot)$ est continue et monotone sur $]a, b[$ et à $f(\cdot, r)$ est continue en x .

On note $A^{\mathcal{C}}$ l'ensemble des points \mathcal{C} -réguliers de A . Montrons que cet ensemble est dense dans A . Soit Q pavé de R^n et $]c, d[$ tels que $Q \times]c, d[\subset A$. Montrons que ce pavé rencontre $A^{\mathcal{C}}$.

Via le théorème de monotonie, on sait que pour tout $x \in Q$, il existe $c(x) \in]c, d[$ tel que $f(x, \cdot)$ est continue et monotone sur $]c, c(x)[$. On vient donc de définir une fonction $c : Q \rightarrow R$ définissable (en effet, $\Gamma(c) = \{(x, y) : x \in Q, y \in]c, d[, \forall z \in]c, y[f(x, \cdot) \text{ est continue et } \forall z < z' \in]c, y[(f(x, z) \leq f(x, z') \text{ ou } f(x, z) \geq f(x, z'))\}$). On sait alors, par CPM_n , qu'il existe une dcdc adaptée à Q telle que sur chaque cellule incluse dans Q on a c continue. En particulier, il existe un pavé ouvert $Q' \subset Q$ sur lequel c est continue et $c(x)$ est minoré par $\gamma > c$. Soit $r \in]c, \gamma[$. Toujours par CPM_n , on sait que la fonction $f(\cdot, r)$ est continue sur un pavé ouvert $Q'' \subset Q$. On a donc $(Q'' \times]c, \gamma]) \cap A^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

Enfin, on considère une dcdc de R^{n+1} adaptée à A et A^C . Soit D une cellule ouverte de cette décomposition. Puisque A^C est dense dans A , on sait que si $D \subset A$, alors $D \subset A^C$. En particulier, d'après le petit lemme, f est continue sur D , d'où le résultat.

Deuxième cas : si A est une cellule fermée.

Si A est une cellule fermée, on sait que sa dimension est strictement inférieure à $n + 1$. On sait donc, d'après le théorème d'identification cellulaire II.2.16, que A est définissablement homéomorphe à une cellule ouverte de R^k où $k < n + 1$. Ainsi, le résultat est immédiat via CPM_k , d'où finalement CPM_{n+1} . \square

Le théorème de décomposition cellulaire, ainsi que celui de continuité par morceaux, sont absolument primordiaux. Ils permettent de simplifier beaucoup de preuves, en se restreignant à des cellules. Par exemple :

PROPOSITION II.2.22

Pour toute dcdc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'union des cellules ouvertes de R^n est dense dans R^n .

Démonstration

On peut raisonner sur les pavés ouverts. Soit P un pavé ouvert de R^n . On peut construire une dcdc adaptée à P . Alors P contient une cellule d'intérieur non-vide. Or une cellule d'intérieur non-vide est nécessairement ouverte (par construction), donc P contient une cellule ouverte, d'où le résultat. \square

Le théorème de décomposition cellulaire permet aussi de prouver qu'un ensemble définissablement connexe est définissablement connexe par arcs, comme nous allons le voir.

THÉORÈME II.2.23 *Choix définissable*

Soit A ensemble définissable de $R^m \times R^n$. On note $p : R^m \times R^n \rightarrow R^m$ la projection des m - premières coordonnées. Il existe $f : p(A) \rightarrow R^n$ définissable telle que :

$$\forall x \in p(A), (x, f(x)) \in A$$

◇ REMARQUE.

Le théorème du choix définissable a de remarquable qu'il permet de traduire une dépendance d'existence entre deux variables en une dépendance définissablement fonctionnelle : $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x, y) \in Z$ (X, Y, Z définissables), alors il existe $f : X \rightarrow Y$ définissable telle que $f(x) = y$.

Démonstration

On peut se contenter de démontrer le résultat pour $n = 1$ (en décomposant la projection de R^{n+m} en plusieurs projections $R^{n+m} \rightarrow R^{n+m-1} \rightarrow \dots \rightarrow R^m$).

On considère une dcdc de A . La projection $p(A)$ est donc une union de projections de cellules contenues dans A . On peut donc étudier le cas où A est une cellule de R^{m+1} (et donc $p(A)$ une cellule de R^m).

Si A est le graphe d'une fonction, on peut tout simplement choisir la fonction.

Si A est une bande (f, g) :

- si f, g sont finies, on considère le milieu de la bande $\frac{1}{2}(f + g)$

- si f infinie et g finie, on considère $g - 1$, - si f finie et g infinie, on considère $f + 1$. \square

LEMME II.2.24 *Sélection de courbe*

Soit $A \subset R^n$ définissable, $b \in \bar{A}$.

Il existe $\gamma :]0, 1[\rightarrow R^n$ continue définissable telle que $\gamma(0) = b$ et $\gamma(]0, 1[) \subset A$.

Démonstration

On considère $X := \{(t, x) \in R \times R^n : x \in A, \|x - b\| < t\}$ qui est définissable (formule du premier ordre, la norme étant un polynôme). Soit $p : R^{n+1} \rightarrow R$ la projection sur la première coordonnée.

Montrons que $p(X) =]0, +\infty[$. L'inclusion directe est trivialement vérifiée par positivité de la norme.

Réciproquement, soit $t > 0$. Puisque $b \in \bar{A} : \exists x \in A : \|x - b\| < t$, et on a alors $t = p(t, x) \in p(X)$.

Ainsi, d'après le théorème du choix définissable : il existe une fonction définissable $f :]0, +\infty[\rightarrow R^n$ telle que

$$\forall t > 0 : f(t) \in A \text{ et } \|f(t) - b\| < t.$$

Puis, d'après le théorème de monotonie, quitte à restreindre f à un sous-intervalle, il existe un intervalle plus petit de la forme $]0, \varepsilon[$ et une fonction continue définissable $\delta :]0, \varepsilon[\rightarrow A$ telle que

$$\forall t \in]0, \varepsilon[: \|\delta(t) - b\|.$$

Enfin, on constate qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en posant $\delta(0) = b$:

$$\|\delta(t) - \delta(0)\| = \|\delta(t) - b\| < t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Par ailleurs, la fonction ainsi prolongée reste définissable (son graphe est le même qu'avant auquel on a ajouté un point : cela reste un ensemble définissable).

Finalement, on a prouvé le résultat, avec la fonction :

$$\gamma: \begin{cases}]0,1[\longrightarrow R^n \\ t \longmapsto \delta(t\varepsilon) \end{cases}$$

□

THÉORÈME II.2.25

Soit $A \subset R^n$ définissable.

Il existe une unique partition finie $\{A_1, \dots, A_k\}$ telle que chaque A_i soit non-vide, ouvert, fermé dans A et définissablement connexe par arcs.

Les A_i sont alors appelés *composantes définissablement connexes* de A .

Démonstration On procède en deux temps.

- Existence :

On commence par une définition. On considère une dcdc. Une cellule C est dite *adjacente* à une autre cellule D si $\overline{D} \cap D \neq \emptyset$. On note alors $C \prec D$.

Soient $C \prec D$ deux cellules. On montre que tout point de C peut être joint à un point de D par un chemin continu définissable à valeurs dans $C \cup D$. Soit $x \in C, y \in D$.

Soit $c \in C \cap \overline{D}$. D'après le lemme de sélection de courbes, il existe $\gamma :]0,1[\rightarrow C \cup D$ continue définissable telle que $\gamma(0) = c$ et $\gamma(]0,1[) \subset D$. On pose $d := \gamma(1/2)$. Les points c et d sont reliés par le chemin continu définissable γ dans $C \cup D$. Via le théorème d'identification cellulaire II.2.16, on sait que chaque cellule est définissablement homéomorphe à un R^k . Ainsi, $x \in C$ peut être relié à c par un chemin continu définissable dans C , de même pour y et d . D'où le résultat.

On définit une nouvelle relation d'équivalence sur les cellules contenues dans A : $C \sim D$ si et seulement si il existe une suite de cellules telle que $C = C_0 \prec C_1 \succ C_2 \prec \dots \succ C_{2k} = D$ et où chaque cellule est contenue dans A (on peut tout à fait avoir $C_i = C_{i+1}$). On note $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ les classes d'équivalence associées et A_i l'union des cellules de \mathcal{E}_i . Ainsi, les A_i forment une partition finie définissable de A . D'après ce qui précède, on sait donc que les A_i sont définissablement connexes par arcs. Si une cellule $C \subset A$ s'intersecte avec $\overline{A_i}$, alors elle est adjacente à une cellule incluse dans \mathcal{E}_i , ce qui implique donc $C \subset A_i$. Ainsi, chaque A_i est fermé dans A . De plus, puisque les A_i forment une partition finie de A , elles sont également ouvertes dans A (leur complémentaire étant l'union finie des autres cellules, donc un fermé).

- Unicité :

Supposons $A = B_1 \cup B_l$ une autre partition, avec les mêmes propriétés. On a $A_i = \bigcup_{j=1}^l (A_i \cap B_j)$ où chaque $A_i \cap B_j$ est définissable, fermé et ouvert dans A_i . Puisque A_i est définissablement connexe, il y a un unique j tel que $A_i \subset B_j$. Mais alors, on a pour les mêmes raisons $B_j \subset A_i$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE II.2.26

Un ensemble définissable définissablement connexe est définissablement connexe par arcs.

◇ REMARQUE.

On constate également (grâce à la preuve) qu'il n'y a pas plus de composantes connexes de A que de cellules contenues dans A pour n'importe quelle dcdc adaptée à A . Un ensemble définissable a donc toujours un nombre fini de composantes connexes. En fait, on peut même obtenir un résultat plus fort, comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME II.2.27 *Finitude uniforme des composantes connexes dans les fibres*

Soit $A \subset R^m$ définissable. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $m = n + p$ et soit $\pi : R^m \rightarrow R^n$ une projection sur un choix de n coordonnées parmi m .

Le nombre de composantes connexes des fibres $\pi|_A : A \rightarrow R^n$ est uniformément borné.

Démonstration Le résultat s'obtient assez simplement. On commence par le prouver lorsque l'on regarde les n premières coordonnées.

On considère une dcdc de $A : \mathcal{D} := \{D_1, \dots, D_l\}$, qui est constituée par récurrence sur les coordonnées de R^n en respectant l'ordre. Soit $x \in R^n$. On a alors que

$$D_1 \cap A_x, \dots, D_l \cap A_x$$

est une décomposition cellulaire de la fibre $A_x = \pi^{-1}(x, 0^p)$: la fibre A_x admet alors au plus l composantes connexes. On obtient une borne qui ne dépend pas de x , donc toutes les fibres de A par rapport au n premières coordonnées sont uniformément bornées (par l).

Ensuite, si l'on fait un choix quelconque de n coordonnées, on peut considérer A' l'image de A par une permutation qui amène les n coordonnées choisies au n premières places. Les fibres de A' ont le même nombre de composantes connexes que les fibres de A , d'où le résultat en appliquant ce que l'on vient de prouver. \square

Nous finissons cette section avec un dernier résultat remarquable qui est une amélioration des théorèmes de décomposition cellulaire et de continuité par morceaux.

DÉFINITION II.2.28 \mathcal{C}^k cellule

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Une cellule \mathcal{C}^k de R^n se définit par récurrence comme cellule de R^n où les fonctions permettant cette construction sont \mathcal{C}^k .

On définit de la même façon une \mathcal{C}^k -dcdc : il s'agit d'une dcdc constituée de cellules \mathcal{C}^k .

THÉORÈME II.2.29 *Décomposition cellulaire* \mathcal{C}^k $\mathcal{D}^k(n)$

Soient $n, k \in \mathbb{N}$.

Soit A_1, \dots, A_l des ensembles définissables de R^n .

Il existe une \mathcal{C}^k -dcdc définissable adaptée aux A_1, \dots, A_l .

THÉORÈME II.2.30 *Caractère* \mathcal{C}^k par cellules $\mathcal{C}^k(n)$

Soient A et $f : A \rightarrow R$ définissables.

Il existe une \mathcal{C}^k -dcdc adaptée à A telle que la restriction de f sur chaque cellule de cette décomposition est \mathcal{C}^k .

Démonstrations simultanées Se référer à l'annexe. \square

◇ REMARQUE.

Ainsi, toute structure o-minimale admet une \mathcal{C}^k -dcdc pour tout k . En revanche, dans le cas \mathcal{C}^∞ , le résultat est vrai dans des structures semi-algébriques, mais pas toujours dans le cadre plus général des structure o-minimales.

3 Invariants définissables

Nous avons donc pu restreindre notre étude à celle des cellules, que l'on sait déjà identifiables à des R^k à homéomorphisme définissable près.

Ainsi, pour poursuivre notre étude de manière plus simple, il est important de trouver des invariants par bijection. C'est donc ici que l'on va introduire les notions de dimension d'un ensemble définissable, ainsi que celle de sa caractéristique d'Euler. [3]

DÉFINITION II.3.31 *Famille définissable*

Soit $S \subset R^{m+n}$ définissable. Pour tout $a \in R^m$, on définit :

$$S_a := \{x \in R^n : (a, x) \in S\}$$

ensemble définissable de R^n .

S peut être vue comme la *famille définissable* $(S_a)_{a \in R^m}$.

Chaque ensemble S_a est appelé *fibre* de S .

◇ REMARQUE.

La notion de famille définissable et de fibres sera primordiale dans la suite, les raisonnements sur les fibres étant plus pratique à manipuler, puisqu'elles ont un comportement relativement uniforme, comme en témoigne le théorème de finitude uniforme. Notamment, les principaux résultats de la dernière section portant sur le comptage de points rationnels useront de ces notions.

PROPOSITION II.3.32

On note $\pi : R^{m+n} \rightarrow R^m$ la projection sur les m premières coordonnées.

Si C est une cellule de R^{m+n} et $a \in \pi(C)$, alors C_a est une cellule de R^n .

Démonstration

Par récurrence. Pour $n = 1$, c'est clair (c'est juste la projection usuelle).

Pour $n > 1$, soit C cellule de R^{m+n+1} , $a \in R^m$.

Si $C = \Gamma(f)$, on pose $f_a : \begin{cases} (\pi_1(C))_a \longrightarrow R \\ x \longmapsto f(a, x) \end{cases}$ continue définissable. On a alors :

$$\begin{aligned} C_a &= \{y \in R^{n+1} : (a, y) \in C\} \\ &= \{(x, f(a, x)) \in R^n \times R : (a, x, f(a, x)) \in C\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{(x, f(a, x)) \in R^n \times R : (a, x) \in \pi_1(C)\} \\ &= \{(x, f_a(x)) \in R^n \times R : x \in (\pi_1(C))_a\} \\ &= \Gamma(f_a) \end{aligned}$$

d'où C_a cellule de R^{m+n+1}

Si $C = (f, g)$ avec $f, g : \pi_1(C) \rightarrow R$ définissables, alors, en notant $D := \pi_1(C)$:

$$\begin{aligned} C_a &= \{x \in R^{n+1} : (a, x) \in C\} \\ &= \{(x, y) \in R^n \times R : (a, x) \in D \text{ et } f(a, x) < y < g(a, x)\} \\ &= \{(x, y) \in R^n \times R : x \in D_a \text{ et } f_a(x) < y < g_a(x)\} \end{aligned}$$

On reconnaît la bande f_a, g_a avec $f_a, g_a : (\pi_1(C))_a \rightarrow R$ continues définissables, d'où C_a cellule de R^{m+n+1} \square

COROLLAIRE II.3.33

On considère une dcdc de R^{m+n} , $a \in R^m$.

L'ensemble des fibres des cellules de cette dcdc est une dcdc de R^n .

DÉFINITION II.3.34 Dimension d'un ensemble définissable (1)

Soit A un ensemble définissable de R^n .

La dimension de A , notée $\dim(A)$, est le max des dimensions des cellules contenues dans A .

Si A est vide, on a par convention $\dim(A) = -\infty$.

◇ REMARQUE.

On constate que la dimension d'un ensemble définissable est nécessairement finie (car la dimension d'une cellule l'est également). De plus, cette notion coïncide avec celle de la dimension d'une cellule dans le cas où notre définissable est une cellule.

▷ EXEMPLE.

$\dim(A) = n \iff A$ contient une cellule ouverte.

Il existe une autre définition de la dimension d'un ensemble définissable. Les deux peuvent se retrouver dans la nature : chez Van den Dries [3] la première définition est préférée alors que chez Coste [2] c'est la seconde qui l'est.

DÉFINITION II.3.35 Dimension d'un ensemble définissable (2)

Soit A un ensemble définissable de R^n .

La dimension de A , notée $\dim(A)$, est le sup des d tels qu'il existe une $f : R^d \rightarrow A$ définissable injective.

Si A est vide, on a par convention $\dim(A) = -\infty$.

Montrons l'équivalence de ces définitions, en introduisant d'abord deux lemmes.

LEMME II.3.36

Soient A ensemble définissable d'intérieur non-vidé de R^n et $f : A \rightarrow R$ définissable et injective.

Alors $f(A)$ est d'intérieur non vide.

Démonstration On procède par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, si A est d'intérieur non-vidé et définissable, A est nécessairement un intervalle ouvert. En particulier, A est infinie : puisque f est définissable et injective, on a $f(A)$ ensemble définissable de R et infini. Via le 5ème axiome d'une structure o-minimale, $f(A)$ contient un intervalle ouvert et n'est donc pas d'intérieur vide.

Pour $n > 1$, on considère une dcdc de R^n adaptée à $f(A)$. On a donc des cellules \mathcal{C}_i telles que :

$$f(A) = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$$

En considérant l'image réciproque, on obtient :

$$A = f^{-1}(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup f^{-1}(\mathcal{C}_k).$$

Puisque A est d'intérieur non-vidé, un des $f^{-1}(\mathcal{C}_i)$ (on peut supposer le premier) contient un pavé ouvert B . Si on prend B suffisamment petit, l'ensemble sera contenu dans une cellule d'une dcdc adaptée à A . D'après le théorème de continuité par morceaux de la décomposition cellulaire, on peut supposer que $f|_B$ est continue.

Par l'absurde, supposons \mathcal{C}_1 non ouvert. On considère alors la composée de $f|_B$ avec un homéomorphisme définissable de \mathcal{C}_1 avec une cellule de R^{n-1} (via le théorème d'identification cellulaire II.2.16). Cette fonction, que l'on note $g : V \rightarrow R^{n-1}$ est donc continue définissable et injective par composition. On écrit $B = B' \times]a, b[$.

Soit $c \in]a, b[$. On considère :

$$h: \begin{cases} B' \longrightarrow R^{n-1} \\ x \longmapsto g(x, c) \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, $h(B')$ n'est pas d'intérieur vide : il existe un ouvert D de R^{n-1} inclus dedans. Soit $y \in D$. Puisque $D \subset h(B')$, il existe $x \in B'$ tel que $y = h(x)$.

Maintenant, soit $c \neq c'$ tel que c' soit suffisamment proche de c pour que $g(x, c') \in D$ (c' est possible puisque D est ouvert et g est continue). Mais on a alors :

$$g(x, c') = h(x) = g(x, c)$$

ce qui contredit l'injectivité de g . Finalement, \mathcal{C}_1 est ouvert, d'où $f(A)$ d'intérieur non-vide. \square

LEMME II.3.37

Si $X \subset R^n$ et $Y \subset R^n$ ensembles définissables et s'il existe une bijection définissable entre X et Y , alors $\dim X = \dim Y$ au sens de la première définition.

Démonstration

Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection définissable. On note $d := \dim X$ et $e := \dim Y$.

Montrons que $d \leq e$.

Soit A une cellule de dimension d contenue dans X . On a alors $f \circ (p_A^{-1}) : p(A) \rightarrow Y$ est une fonction injective et $p(A)$ est une cellule ouverte (projetée d'une cellule ouverte de dimension supérieure). En remplaçant X par $p(A)$, Y par $f(A)$ et f par $f \circ (p_A^{-1})$, on peut supposer $d = n$ et donc X cellule ouverte de R^n .

On considère une dcdc adaptée à $Y = f(X) : Y = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$. Ainsi : $X = f^{-1}(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup f^{-1}(\mathcal{C}_k)$. On sait donc que, par exemple, $f^{-1}(\mathcal{C}_1)$ contient une cellule ouverte B . On pose $C := \mathcal{C}_1$. C est donc de dimension $\leq e$ (c' est une cellule de Y). Montrons que C est de dimension supérieure à d .

Par l'absurde, si $\dim(C) < d$, la composée $f|_B \circ p_C$ est injective de B dans $p(C) \subset R^{\dim(C)}$. On peut identifier $R^{\dim(C)}$ avec une cellule non-ouverte $R^{\dim(C)} \times \{p\}$ de R^d , où $p \in R^{d-\dim(C)}$ grâce au théorème d'identification cellulaire II.2.16. Or une cellule non ouverte est une cellule d'intérieur vide : c'est impossible puisque cela contredit le lemme II.3.36

Pour l'autre inégalité, on applique le même raisonnement à f^{-1} . \square

Démonstration de l'équivalence des définitions

Soit C une cellule satisfaisant la première définition, soit d satisfaisant la seconde.

\Leftarrow Montrons que $\dim(C) \leq d$

D'après le théorème d'identification cellulaire II.2.16, on sait que C est définissablement homéomorphe à $R^{\dim(C)}$. En particulier, cela induit l'existence d'une fonction $g : R^{\dim(C)} \rightarrow A$ définissable injective. Par maximalité de d , on a donc $\dim(C) \leq d$ pour toute cellule incluse dans A .

\Rightarrow Montrons que $\dim(C) \geq d$

Par définition de d , il existe $g : R^d \rightarrow A$ injective définissable. En particulier, en notant toujours g sa corestriction à son image, on obtient $g : R^d \rightarrow \text{Im}(g)$ bijective définissable (la fonction a le même graphe). Mais alors, d'après le lemme, $\dim(\text{Im}(g)) = \dim(R^d) = d$. $\text{Im}(g)$ contient donc une cellule de dimension d . Or $\text{Im}(g) \subset A$, donc $\dim(C) = \dim(A) \geq d$. \square

PROPOSITION II.3.38 Quelques résultats sur la dimension

1) Si $A \subset B \subset R^n$ avec X, Y ensembles définissables, alors $\dim A \leq \dim B \leq n$.

De plus, si f est injective, alors $\dim(f(A)) = \dim(A)$.

2) Si $A, B \subset R^n$ ensembles définissables, alors $\dim(A \cup B) = \max(\dim A, \dim B)$

3) Si A et B sont définissables, alors $\dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B)$.

Démonstration

1) est évident par définition.

2) Soit $d := \dim(A \cup B)$. Puisque $A \subset A \cup B$ (et de même pour B), on a déjà $\max(\dim A, \dim B) \leq d$.

Soit C une cellule de dimension d incluse dans $A \cup B$. On considère la projection $p(C) \subset R^d$ qui est donc une cellule ouverte de R^d (on projette sur les coordonnées faisant gagner une dimension). On a alors $p(C) = p_C(A \cap C) \cup p_C(B \cap C)$. Via le théorème de décomposition cellulaire, on peut considérer une partition adaptée à $p_C(A \cap C)$ et à $p_C(B \cap C)$: on sait alors que l'un des deux ensembles contient un pavé P de R^d (par exemple $p_C(A \cap C)$). Mais alors $p_C^{-1}(P)$ est de dimension d contenue dans A . Par définition : $\max(\dim(A), \dim(B)) \geq \dim(A) \geq d$, d'où l'égalité.

3) On peut se restreindre au cas où A et B sont des cellules grâce au point précédent. Mais alors $A \times B$ est définissablement homéomorphe à $R^{\dim(A)} \times R^{\dim(B)}$ par théorème d'identification cellulaire II.2.16. D'où $\dim(A \times B) = \dim(R^{\dim(A)+\dim(B)}) = \dim(A) + \dim(B)$. \square

La dimension est donc un invariant définissable (deux ensembles en bijection définissable ont même dimension). Ce n'est toutefois pas le seul. Prenons un exemple dans R : une partition d'un intervalle en cellules est faite de k points et $k + 1$ intervalles, où $k \in \mathbb{N}$. Mais qu'importe la valeur de k , on constate que la différence entre le nombre de points et le nombre d'intervalles est toujours constant égal à -1 . C'est cette intuition en dimension 1 que l'on généralise avec la caractéristique d'Euler.

DÉFINITION II.3.39

Pour tout cellule de dimension d , on définit :

$$E(C) := (-1)^d.$$

De manière plus générale, pour une partition cellulaire \mathcal{P} d'un ensemble définissable S de R^n , on définit :

$$E_{\mathcal{P}}(S) := \sum_{C \in \mathcal{P}} E(C) = k_0 - k_1 + \dots + (-1)^m k_m$$

où k_i est le nombre de cellules de dimension i dans \mathcal{P} .

Nous venons de définir une quantité semblant généraliser notre intuition. Cependant, il reste encore un peu de travail : il nous faut vérifier que cette quantité est indépendante de la partition choisie. Pour ce faire, nous allons avoir besoin de définitions et résultats préalables.

DÉFINITION II.3.40 *Décomposition d'une cellule*

On définit par induction la notion de *décomposition d'une cellule* :

- 1) Toute partition finie d'une cellule $C \subset R$ en cellules est une décomposition de C .
- 2) Pour $n > 1$, une décomposition d'une cellule $C \subset R^n$ est une partition finie \mathcal{D} de C en cellules telle que $\pi(\mathcal{D}) := \{\pi D : D \in \mathcal{D}\}$ est une décomposition de la cellule $\pi C \in R^{n-1}$.

▷ EXEMPLE.

Les décompositions d'une cellule $C \in R^n$ sont exactement les restrictions à C des décompositions de R^n adaptée à C . (Preuve par récurrence sur n).

◇ REMARQUE.

Dans le cas où la cellule considérée est R^n , la définition coïncide bien avec celle d'une dcde.

LEMME II.3.41

Si \mathcal{D} est une décomposition d'une cellule C , alors :

$$E_{\mathcal{D}}(C) = E(C) = (-1)^{\dim(C)}.$$

Démonstration Par induction sur n .

Pour $n = 1$, C est soit un singleton, soit un intervalle.

Si C est un singleton, il n'y a qu'une seule partition finie en cellules, c'est lui-même : l'égalité tient trivialement.

Si C est un intervalle, une partition finie de C sera, comme présenté dans l'introduction de cette sous-section, la donnée de k singletons et $k - 1$ intervalles. On a donc directement $E_{\mathcal{D}} = -1 = (-1)^{\dim(C)}$ (puisque C est dimension 1) d'où le résultat.

Pour $n > 1$, $\pi(\mathcal{D})$ est une décomposition en cellules de $\pi(C)$ (par définition) et on a donc par hypothèse de récurrence :

$$E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C)).$$

Supposons que C est une bande (on a donc $\dim(C) = \dim(\pi(C)) + 1$).

Soit $B \in \pi(\mathcal{D})$. On sait qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe des fonctions continues définissables $f_i : B \rightarrow R$ ($0 \leq i \leq t$) qui vérifient

$$\mathcal{P}_B := \{\Gamma(f_1), \dots, \Gamma(f_t), (f_0, f_1), \dots, (f_{t-1}, f_t)\}$$

soit une partition en cellules de $\{D \in \mathcal{D} : \pi(D) = B\}$. On pose $d := \dim(B)$. On sait alors que la contribution de \mathcal{P}_B à $E_{\mathcal{D}}(C)$ vaut $t \cdot (-1)^d + (t + 1) \cdot (-1)^{d+1} = (-1)^{d+1} = -E(B)$. Or $\{\mathcal{P}_B : B \in \pi(\mathcal{D})\}$ est une partition de \mathcal{D} , donc :

$$E_{\mathcal{D}}(C) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} -E(B) = -E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = -E(\pi(C)) = (-1)^{\dim(\pi(C))+1} = E(C).$$

Supposons maintenant que C est un graphe (on a donc $\dim(C) = \dim(\pi(C))$).

Soit $B \in \pi(\mathcal{D})$. On sait alors qu'il existe une fonction continue définissable $f : B \rightarrow R$ telle que $\Gamma(f)$ soit une partition en cellules de $\{D \in \mathcal{D} : \pi(D) = B\}$. On note d la dimension de B . La contribution de cette partition à

$E_{\mathcal{D}}(C)$ vaut $(-1)^d = E(B)$. Finalement, le même calcul que précédemment donne :

$$E_{\mathcal{D}}(C) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} E(B) = E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C)) = (-1)^{\dim(\pi(C))} = (-1)^{\dim(C)} = E(C).$$

⊠

LEMME II.3.42

Soit deux partitions en cellules $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ d'un ensemble définissable $S \subset R^n$.

Alors il existe une partition en cellule \mathcal{P} de S telle que, pour toute cellule $C \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, la restriction $\mathcal{P}|_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{P}\}$ soit une décomposition de C .

Démonstration

On considère une partition \mathcal{C} de R^n adaptée à chaque cellule de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Alors $\{S \cap C' : C' \in \mathcal{C}\}$ donne une partition \mathcal{P} en cellules satisfaisant les conditions du lemme. ⊠

THÉORÈME II.3.43

Soit $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux partitions en cellules de S .

Alors :

$$E_{\mathcal{P}_1}(S) = E_{\mathcal{P}_2}(S).$$

Démonstration

Soit \mathcal{P} partition en cellules de S issue du lemme précédent. On a alors :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{P}}(S) &= \sum_{C \in \mathcal{P}_1} E_{\mathcal{P}|_C}(C) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{P}(1)} E(C) \text{ via le lemme} \\ &= E_{\mathcal{P}_1}(S) \end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour $E_{\mathcal{P}_2}(S)$, d'où le résultat. ⊠

DÉFINITION II.3.44 *Caractéristique d'Euler*

Pour un ensemble définissable S de R^n , on définit sa *caractéristique d'Euler* :

$$E(S) := E_{\mathcal{P}}(S) \text{ pour une partition en cellules } \mathcal{P} \text{ de } S.$$

◇ REMARQUE.

Le théorème précédent montre le bien fondé de cette définition.

▷ EXEMPLE.

- Le cercle est de caractéristique d'Euler nulle. On peut considérer une dcdc construite à partir d'un intervalle ouvert (de la taille du diamètre de notre cercle) et de deux points. Il s'agit alors de prendre les deux arcs de cercles au dessus de l'intervalle (ce sont des graphes au-dessus de cet intervalles : ils sont donc de dimension 1) et les points connectant les deux arcs de cercles (ce sont des graphes au-dessus des autres points : ils sont donc de dimension 0). Finalement, il reste $E(\text{cercle}) = 2 \cdot (-1)^0 + 2 \cdot (-1)^1 = 0$.

- Considérons un disque fermé dans R^2 . On peut considérer une dcdc constituée des cellules : faites de deux points antipodaux, des deux arcs de cercles, et du disque ouvert (représentant la bande entre les deux arcs). Les points sont de dimension 0, les arcs de cercles sont de dimension 1 et le disque ouvert est de dimension 2 : ainsi, la caractéristique d'Euler d'un disque dans R^2 vaut $2 - 2 + 1 = 1$.

- Ce résultat est généralisable à toute dimension, comme démontré dans l'Annexe (première sous-section) : toute boule en toute dimension est de caractéristique d'Euler égale à 1.

PROPOSITION II.3.45 *La caractéristique est additive*

Soient S_1, S_2 deux ensembles définissables.

- 1) Si les ensembles sont disjoints, alors $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$.
- 2) Si $S \subset T$, alors $E(T \setminus S) = E(T) - E(S)$.
- 3) De manière plus générale : $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2)$.

Démonstration

1) est évidemment vraie.

2) il suffit d'écrire $T = S \sqcup (T \setminus S)$. On a alors $E(T) = E(S) + E(T \setminus S)$.

3) On constate que $S_1 \cup S_2 = S_1 \setminus (S_1 \cap S_2) \sqcup S_2 \setminus (S_1 \cap S_2) \sqcup (S_1 \cap S_2)$. En appliquant 1) et 2), on a donc :

$$\begin{aligned} E(S_1 \cup S_2) &= E(S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)) + E(S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)) + E(S_1 \cap S_2) \\ &= E(S_1) - E(S_1 \cap S_2) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2) + E(S_1 \cap S_2) \\ &= E(S_1) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

□

◇ REMARQUE.

On constate que la caractéristique d'Euler ne suffit donc pas à caractériser deux ensembles en bijections définissables.

PROPOSITION II.3.46

Soit S définissable de R^{m+n} . Soit \mathcal{D} une dcdc de R^{m+n} adaptée à S .

Alors, pour une cellule $A \in \pi(\mathcal{D})$, il existe $e_A \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $a \in A$, $E(S_a) = e_A$ et

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A) \cdot e_A.$$

Démonstration

On suppose que $A \in \pi(\mathcal{D})$ est une (i_1, \dots, i_m) -cellule. Soit $C \in \mathcal{D}$ telle que $C \subset S$ et $\pi C = A$. Ainsi, on sait que C est une $(i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -cellule (pour certains i_{m+1}, \dots, i_{m+n}). On sait alors que, pour tout $a \in A$, C_a est une $(i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -cellule. De plus, puisque $\dim(C) = \dim(C_a) + \dim(A)$, on directement $E(C) = E(C_a) \cdot E(A)$.

Puis, on sait que $\pi^{-1}(A) \cap S$ est une union de cellules C de \mathcal{D} et que pour $a \in A$, S_a est une union de fibres C_a correspondantes. En passant à l'union :

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(S_a) \cdot E(A).$$

On en déduit que S_a est de caractéristique constante, d'où le résultat. □

◇ REMARQUE.

Le théorème de finitude uniforme nous donnait déjà un résultat important quant à la finitude des fibres (leur finitude assure le finitude uniforme), ce résultat assoit l'intuition d'uniformité des fibres : elles ont même caractéristique d'Euler.

COROLLAIRE II.3.47

Soit $S \subset R^{m+n}$ définissable. On suppose que toutes les fibres non vides S_a ($a \in R^m$) ont la même caractéristique d'Euler, notée e .

Alors :

$$E(S) = E(\pi(S)) \cdot e$$

COROLLAIRE II.3.48 *La caractéristique est multiplicative*

Soit A, B ensembles définissables de R^n, R^m . On a alors :

$$E(A \times B) = E(A) \cdot E(B)$$

Démonstration

Il suffit de considérer une dcdc adaptée à S , appliquer la proposition à chaque cellule de sa partition, puis faire l'union. □

▷ EXEMPLE.

On a vu que la caractéristique d'Euler du cercle est de 0, donc un tore (produit cartésien de deux cercles de même taille) est de caractéristique 0.

THÉORÈME II.3.49

Soit $S \subset R^m$ définissable, $f : S \rightarrow R^n$ définissable injective.

Alors

$$E(S) = E(f(S))$$

Démonstration

On applique le corollaire II.3.47.

Soit $a \in R^n$. Si $a \notin f(S)$, alors $\Gamma(f) = \emptyset$. On suppose donc $a \in f(S)$. On constate alors que $(\Gamma(f))_a = \{(a, x) \in \Gamma(f)\} = \{f(x)\}$. D'où, via le corollaire : $E(\Gamma(f)) = E(S)$.

On pose $\Gamma'(f) := \{(f(x), x) : x \in S\}$, le graphe "inversé" de f . On sait que Γ' est définissable. Soit $a \in R^n$. Si $\Gamma'(f) \neq \emptyset$, alors $(\Gamma'(f))_a = \{x \in R^m : (a, x) \in \Gamma'(f)\} = f^{-1}(\{a\})$ qui est un singleton puisque f est injective. D'où, via le corollaire : $E(\Gamma'(f)) = E(f(S))$. □

Le résultat est ainsi presque prouvé : il faut montrer que $E(\Gamma(f)) = E(\Gamma'(f))$. Pour ce faire, on peut montrer un résultat plus général : deux ensembles définissables égaux à permutation près ont même caractéristique d'Euler.

En réalité, puisque le groupe symétrique σ_n est engendré par les transpositions et que A est une union disjointes de cellules (via le théorème de décomposition cellulaire), il suffit de prouver que $E(A) = E(A\sigma)$ (où σ permutation, A définissable et $A\sigma := \{x\sigma : x \in A\}$ (les éléments de $A\sigma$ sont ceux de A , à permutation des coordonnées près) dans le cas où A est une cellule et où σ est une transposition.

Ce résultat découle immédiatement si l'on parvient à prouver que A est une union finie disjointe de cellules C_i telles que les $C_i\sigma$ soient aussi des cellules. On aura alors $\dim(C_i) = \dim(C_i\sigma)$, donc $E(C_i) = E(C_i\sigma)$, et donc $E(A) = \sum E(A_i) = \sum E(C_i\sigma) = E(A\sigma)$.

La démonstration est fastidieuse : il faut traiter successivement plusieurs cas et sous-cas, et pour certains d'entre eux introduire des notions (celle de points critique d'une fonction définissable par exemple). La démonstration n'a pas été faite ici (par souci de taille du rapport), mais elle est trouvable dans [3] à partir de la page 73.

COROLLAIRE II.3.50

Si deux ensembles définissables A et B sont en bijection définissable, alors ils ont la même caractéristique d'Euler.

▷ **EXEMPLE.**

Pour A définissable, A et $A \setminus \{a\}$ ($a \in A$) ne sont pas en bijection définissable, puisque $E(A \setminus \{a\}) = E(A) - 1$. La sphère S_2 de \mathbb{R}^3 et la boule B_2 de \mathbb{R}^2 sont toutes deux de dimension 2, mais la sphère est de caractéristique d'Euler 2 alors que la boule est de caractéristique d'Euler 1 : ces deux ensembles ne sont donc pas en bijection définissable.

III Comptage de points rationnels

1 Motivation

Nous avons mis en place une grande partie des notions de bases de la géométrie o-minimale. Le but de cette section est d'utiliser ces structures particulières pour dégager des résultats intéressants sur leurs points rationnels. L'objectif de cette section est de majorer le nombre d'entier rationnels d'un ensemble définissable, sous plusieurs hypothèses.[4] [?]

DÉFINITION III.1.1 *Parties algébrique et transcendante*

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. La *partie algébrique* de X , notée X^{alg} , est l'union de tous les sous-ensembles semi-algébriques connexe de dimension strictement positive de X .

On définit alors la *partie transcendante* de X par $X \setminus X^{\text{alg}}$.

DÉFINITION III.1.2

Soit $\kappa, p \in \mathbb{N}$.

On définit l'ensemble des *points p -réguliers de dimension κ de X* , noté $\text{reg}_\kappa^p(X)$, comme étant l'ensemble des $x \in X$ tel qu'il existe un voisinage ouvert U autour de x tel que $U \cap X$ est une sous-variété \mathcal{C}^p de \mathbb{R}^n de dimension κ . Dans le cas où $p = 1$, on dit qu'il s'agit d'un *point régulier de dimension κ* .

PROPOSITION III.1.3

Pour tous $\kappa, p \in \mathbb{N}$ et X définissable, $\text{reg}_\kappa^p(X)$ est définissable.

Démonstration

Dans l'Annexe. ⊠

DÉFINITION III.1.4

La *dimension* de X est le $\kappa \in \mathbb{N}$ maximum tel que X a des points réguliers de dimension κ .

◇ **REMARQUE.**

Si X est de dimension κ , $X \setminus \text{reg}_\kappa^1(X)$ est de dimension $\leq \kappa - 1$.

DÉFINITION III.1.5

On se place sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On considère π_1 (resp. π_2) la projection sur les n premières (resp. m dernières) coordonnées. Soit $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On définit $Y_Z := \pi_2(Z)$ et pour $y \in Y_Z$ on définit $Z_y := \{z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \pi_2(z) = y\}$ et $X_{Z,y} := \{\pi_1 z : z \in Z_y\}$

RAPPEL III.1.6 Famille définissable

Une famille définissable est un ensemble définissable $Z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vu comme la famille de ses fibres $X_{Z,y} \subset \mathbb{R}^n$ avec $y \in Y_Z$.

DÉFINITION III.1.7

Soit $f : S \rightarrow A$ avec $A \subset \mathbb{R}^n, S \subset \mathbb{R}^m$.

Une *trivialisat*ion définissable de f est un couple (F, λ) avec $F \subset \mathbb{R}^N$ (pour un $N \in \mathbb{N}$) et $\lambda : S \rightarrow F$ définissable de telle sorte que $(f, \lambda) : S \rightarrow A \times F$ est un homéomorphisme.

Une fonction f est dite *définissablement triviale* si elle admet une trivialisation triviale.

Soit $A' \subset A$ définissable. On dit que f est *définissablement triviale sur A'* si $f_{f^{-1}(A')} : f^{-1}(A') \rightarrow A'$ est définissablement triviale.

◇ REMARQUE.

Moralement, cela signifie que l'on peut voir f comme une projection sur A , à partir d'un ensemble du produit cartésien de A avec un ensemble homéomorphe aux fibres $f^{-1}(a)$ ($a \in A$) de f .

THÉORÈME III.1.8 Trivialisation

Soit $f : S \rightarrow A$ continue définissable. Il existe une partition $A = A_1 \cup \dots \cup A_l$ telle que f est définissablement triviale sur chaque A_i .

Démonstration Admis, se référer à [3] p.142. ⊠

PROPOSITION III.1.9 Décomposition fibrée

Soit $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ une famille définissable. Il existe $J \in \mathbb{N}$ et des familles définissables $Z_j \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec $j = 1, \dots, J$ vérifiant les propriétés suivantes :

Pour tout j , chaque fibre de Z_j est connexe et est une composante connexe de la fibre de Z correspondante. De plus, l'ensemble Y_{Z_j} est le sous-ensemble de Y_Z tel que la fibre $X_{Z,y}$ a au moins j composantes connexes et, pour chaque $y \in Y_Z$, les fibres $(Z_j)_y$ sont disjointes et vérifient

$$Z_y = \bigcup_{j=1}^J (Z_j)_y.$$

Démonstration

On applique le théorème de trivialisation à $\pi_{2|Z} : Z \rightarrow Y_Z$. On obtient donc une partition définissable $A_1 \cup \dots \cup A_l$ de Y_Z , des ensembles définissables F_i et pour tout i une fonction définissable $\lambda_i : \pi_{2|Z}^{-1}(A_i) \rightarrow F_i$ tel que $(\pi_{2|Z}^{-1}(A_i), \lambda_i) : \pi_{2|Z}^{-1}(A_i) \rightarrow A_i \times F_i$ est un homéomorphisme. On note θ_i sa bijection réciproque.

Ainsi, pour $y \in A_i$, on sait que l'application $\eta \in F_i \mapsto \theta_i(y, \eta)$ est un homéomorphisme définissable entre F_i et la fibre Z_y (en effet : l'image de θ_i est donc $\pi_2^{-1}(A_i)$, donc l'image de F_i par $\eta \mapsto \theta_i(y, \eta)$ est $\pi_2^{-1}(y) = Z_y$).

Puisque les F_i sont définissables, on sait qu'ils admettent un nombre fini de composantes connexes définissables, que l'on note $F_{i,j}$. On considère l'image des θ_i restreinte à $A_i \times F_{i,j}$. On obtient alors une collection finie Z'_i de familles définissables dont les fibres sont connexes, et pour chaque $y \in Y$, l'union des fibres associées à y est exactement Z_y . Puisque, à $y \in Y$ fixé, les $\eta \mapsto \theta_i(y, \eta)$ sont des homéomorphismes, on sait que les images des $F_{i,j}$ par ces fonctions sont les composantes connexes de Z_y .

Enfin, on note J le nombre maximal de composantes connexes dans une fibre Z_y (on rappelle que de telles fibres sont uniformément bornées). Pour $j = 1, \dots, J$, on considère Y_j l'union des ensembles de A_i tels que F_i a au moins j composantes connexes. Sur Y_1 , on choisit arbitrairement une des composantes de F_i pour chaque A_i . Cela forme une première famille Z_1 . Puis, sur Y_2 , on choisit une autre composante de F_i , pour construire Z_2 . Puis on continue, jusqu'à ce que toutes les composantes de tous les F_i aient été casées. ⊠

◇ REMARQUE.

Ce théorème est primordial dans la suite, puisqu'il donne une décomposition d'une famille définissable en familles définissables connexes, qui sont liées à la partie algébrique d'un ensemble.

2 Paramétrisation : le théorème de Yomdin-Gromov

Avant de poursuivre vers le théorème principal de cette étude, nous allons avoir besoin d'introduire la notion de paramétrisation que l'on doit à Yosef Yomdin et Mikhaïl Gromov. L'idée est de caractériser un ensemble définissable comme l'union finie d'images de fonctions aussi régulières que l'on souhaite et dont on peut uniformément borner les dérivées. [5]

DÉFINITION III.2.10 *Notions de bornitude forte*

$x \in R$ est dit fortement borné s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq c$.

$(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ est dit fortement borné si chaque x_i est fortement borné.

Un ensemble définissable X de R^n est dit *fortement borné* s'il existe un $c \in \mathbb{N}$ tel que chaque élément de X est borné par c .

Une fonction est dite fortement bornée si son domaine et son image sont fortement bornés.

◇ REMARQUE.

La notion de fortement bornée revient donc à considérer que notre ensemble définissable est contenu dans un pavé. Cette condition n'est pas contraignante en vue de notre objectif final : les rationnels sous une certaine hauteur seront justement compris dans un pavé.

DÉFINITION III.2.11 *Paramétrisation d'un ensemble*

Soit $X \subset R^n$ définissable. Une fonction $\Phi :]0,1[\rightarrow X$ est appelée *paramétrisation partielle* de X .

Un ensemble fini S de paramétrisations partielles de X est appelée *paramétrisation* de X si

$$\bigcup_{\Phi \in S} \text{Im}(\Phi) = X.$$

Soit $r \geq 1$. Une paramétrisation S de X est appelée *r-paramétrisation* de X si pour chaque $\Phi \in S$, on a $\Phi \in \mathcal{C}^r$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{\dim X}$ tel que $|\alpha| \leq r$, on a $\Phi^{(\alpha)}$ fortement borné.

THÉORÈME III.2.12 *Yomdin-Gromov pour un ensemble*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout définissable X fortement borné, il existe une r -paramétrisation de X .

DÉFINITION III.2.13 *Reparamétrisation d'une fonction*

Soit $r \geq 1$ et S une r -paramétrisation de $X \subset R^n$ définissable et $f : X \rightarrow R^n$ définissable. Alors S est appelée *r-reparamétrisation* de f si pour chaque $\Phi \in S$, $f \circ \Phi$ est \mathcal{C}^r et $(f \circ \Phi)^{(\alpha)}$ est fortement borné pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{\dim(X)}$ tel que $|\alpha| \leq r$.

THÉORÈME III.2.14 *Yomdin-Gromov pour une fonction*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et toute fonction f définissable fortement bornée, il existe une r -reparamétrisation de f .

Ces deux théorèmes ne sont pas triviaux : nous allons avoir besoin de plusieurs lemmes pour les démontrer. Pour simplifier les raisonnements, Pila et Wilkie supposent que R est \aleph_0 -saturé et en particulier non-archimédien, afin de faire intervenir les fonctions de Skolem notamment. Cependant, ces raisonnements demandant des prérequis bien trop éloignés de tout ce qui était nécessaire jusqu'à présent, nous ferons abstraction de cette hypothèse. Il se trouve que les fonctions de Skolem reviennent à généraliser les fonctions issues du théorème du choix définissable II.2.23 : de fait, lorsque nous aurions normalement eu besoin de ces fonctions, nous invoquerons comme argument le théorème.

On commence par se restreindre au cas $X =]0,1[$ (on pourra alors facilement récupérer le cas pour $X \subset R$ définissable quelconque).

LEMME III.2.15

Soit $r \geq 2$, $f :]0,1[\rightarrow R$ définissable \mathcal{C}^r avec les $f^{(i)}$ fortement bornées pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$. On suppose de plus que $|f^{(r)}|$ est décroissante. On pose alors :

$$g : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow R \\ x \longmapsto f(x^2) \end{cases}.$$

Alors $g^{(i)}$ est fortement bornée pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$.

Démonstration

Pour tout $i \in]0, r]$, on a via la règle de la chaîne

$$g^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^i P_{i,j}(x) f^{(j)}(x^2)$$

où les $P_{i,j}$ sont des polynômes de degrés j à coefficients entiers.

Par hypothèse, chaque terme de ces sommes est fortement borné, sauf peut-être le dernier (quand $i = j = r$) qui vaut $2^r x^r f^{(r)}(x^2)$. Montrons que c'est également le cas.

Soit $c \in \mathbb{N}$ bornant fortement les dérivées de f . Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $|f^{(r)}(x_0)| > \frac{4c}{x_0}$. On applique le théorème des accroissements finis à $f^{(r-1)}$ sur $[\frac{x_0}{2}, x_0]$: il existe $y \in [\frac{x_0}{2}, x_0]$ tel

que

$$f^{(r-1)}(x_0) - f^{(r-1)}\left(\frac{x_0}{2}\right) = f^{(r)}(y) \frac{x_0}{2}.$$

Or, par hypothèse, on a :

$$|f^{(r)}(y)| \geq |f^{(r)}(x_0)| > \frac{4c}{x_0}.$$

Finalement, il s'en suit

$$2c < |f^{(r)}(y)| \frac{x_0}{2} = |f^{(r-1)}(x_0) - f^{(r-1)}\left(\frac{x_0}{2}\right)| \leq 2c$$

ce qui est absurde. Finalement :

$$\forall x \in]0,1[: |2^r x^r f^{(r)}(x^2)| \leq 2^r x^r \frac{4c}{x^2} \leq 2^{r+2} c$$

d'où $g^{(i)}$ fortement borné pour tout $0 \leq i \leq r$. □

LEMME III.2.16

Soit $f :]0,1[\rightarrow R$ définissable, fortement bornée.

Alors f admet une 1-reparamétrisation S telle que pour tout $\Phi \in S$, soit Φ soit $f \circ \Phi$ est polynomiale à coefficients fortement bornés.

Démonstration

On exploite le théorème II.2.29 de décomposition cellulaire \mathcal{C}^1 et le théorème de monotonie pour obtenir une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = 1$ telle que f est \mathcal{C}^1 et vérifie soit $|f'| \leq 1$ soit $|f'| \geq 1$ sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ (on applique le théorème de monotonie à f sur la première subdivision obtenue par le théorème de décomposition \mathcal{C}^1 -cellulaire. Ensuite, on re-subdivise de manière à séparer les cas où la pente de $|f|$ est inférieure ou supérieure à 1).

1^{er} cas : $|f'| \geq 1$
On définit

$$\Phi_i : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow R \\ x \longmapsto (a_{i+1} - a_i)x + a_i \end{cases}.$$

2^{ème} cas : $|f'| \leq 1$

Dans ce cas, F est continue et strictement monotone (via notre choix de décomposition). On pose alors

$$b_i = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \text{ et } b_{i+1} = \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^+} f(x).$$

On définit ensuite

$$\Phi_i : \begin{cases}]0,1[\longrightarrow R \\ x \longmapsto f^{-1}((b_{i+1} - b_i)x + b_i) \end{cases}.$$

Dans les deux cas, on a $\text{Im}(\Phi_i) =]a_i, a_{i+1}[$, Φ_i et $f \circ \Phi_i$ sont \mathcal{C}^1 sur $]0,1[$ avec des dérivées fortement bornées. De plus, dans au moins un des deux cas on obtient pour chaque i une fonction linéaire à coefficients dans $[-1,1]$. Ainsi, on a clairement $S = \{\Phi_0, \dots, \Phi_k, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k\}$ 1-paramétrisation de f vérifiant la propriété supplémentaire, où les \hat{a}_i sont des fonctions constantes sur $]0,1[$ égales à a_i . □

LEMME III.2.17

Soit $r \geq 1$, $f :]0,1[\rightarrow R$ définissable et fortement bornée.

La fonction f admet une r -paramétrisation S telle que pour chaque $\Phi \in S$, soit Φ soit $f \circ \Phi$ est polynomiale à coefficients fortement bornés.

Démonstration Par récurrence sur r .

$r = 1$: il s'agit du lemme précédent.

$r \geq 2$: soit S une $(r-1)$ -paramétrisation de f satisfaisant la propriété.

Soit $\Phi \in S$. On écrit $\{\Phi, f \circ \Phi\} = \{g, h\}$ où g est polynomiale à coefficients fortement bornés. Ainsi, on sait en particulier que $g^{(i)}$ existe et est fortement borné pour tout i . Cependant, pour h , on sait seulement que $h^{(i)}$ existe, est continue et est fortement bornée pour $i = 0, \dots, r-1$.

On cherche donc à appliquer le lemme 1. Pour ce faire, on utilise une nouvelle fois le théorème de décomposition \mathcal{C}^r -cellulaire et celui de monotonie pour obtenir une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = 1$ telle que h est \mathcal{C}^r sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $|h^{(r)}|$ est monotone sur $]a_i, a_{i+1}[$.

On définit alors $\theta_{\Phi, i} :]0,1[\rightarrow]0,1[$ par :

$$\theta_{\Phi, i}(x) = \begin{cases} (a_{i+1} - a_i)x + a_i & \text{si } |h^{(r)}| \text{ décroît,} \\ (a_i - a_{i+1})x + a_{i+1} & \text{si } |h^{(r)}| \text{ croît.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, $h \circ \theta_{\Phi,i}$ est \mathcal{C}^r et chaque $(h \circ \theta_{\Phi,i})^{(i)}$ est borné fortement borné pour $i = 0, \dots, r-1$. Par ailleurs, $|(h \circ \theta_{\Phi,i})^{(r)}|$ est décroissante. On introduit

$$p: \begin{cases}]0,1[\longrightarrow]0,1[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}.$$

Alors, d'après le lemme III.2.15, on sait que $h \circ \theta_{\Phi,i} \circ p :]0,1[\rightarrow R$ a des dérivées i -ème fortement bornées pour $i = 0, \dots, r$. D'autre part, $g \circ \theta_{\Phi,i} \circ p$ est toujours un polynôme à coefficients fortement bornés. De plus, $\{h \circ \theta_{\Phi,i} \circ p, g \circ \theta_{\Phi,i} \circ p\} = \{\Phi \circ \theta_{\Phi,i} \circ p, f \circ (\Phi \circ \theta_{\Phi,i} \circ p)\}$ avec i variant de 0 à p_{Φ} et $\text{Im}(\Phi \circ \theta_{\Phi,i} \circ p)$ recouvre $\text{Im}(\Phi)$ à quelques points près (p étant bijective et $\theta_{\Phi,i}$ couvrant tous les intervalles de notre subdivision initiale). Il suffit donc d'ajouter un nombre fini de fonctions constantes (correspondant aux points manquants) à $\{\Phi \circ \theta_{\Phi,i} \circ p : \Phi \in S\}$ pour obtenir la r -reparamétrisation de f avec la propriété souhaitée. \square

COROLLAIRE III.2.18

Soit X un ensemble fortement borné de R , $f : X \rightarrow R$ fortement bornée. Pour tout $r \geq 1$, f admet une r -reparamétrisation.

Démonstration En tant que définissable de R , X est une union finie d'intervalles ouverts et de points. X est donc fortement borné et, à ce titre, admet une r -paramétrisation S faite de fonctions linéaires et de constantes. On utilise alors le lemme III.2.17 pour r -reparamétriser chaque $f \circ \Phi$ pour $\Phi \in S$: l'union de toutes ces reparamétrisations donne la reparamétrisation souhaitée. \square

Il reste donc à généraliser ce résultat pour des fonctions à image dans R^n pour $n \geq 2$.

LEMME III.2.19

Soient $m, r \geq 1$. On suppose que chaque fonction définissable et fortement bornée sur $X \subset R^l$ ($l \leq m$) et d'image dans R admet une r -reparamétrisation. Alors, pour tout $n \geq 1$, le résultat reste vrai pour de telles fonctions à image dans R^n .

Démonstration Par récurrence sur n .

Prouvons que si $n \geq 2$ et $F : X \rightarrow R^{n-1}$, $f : X \rightarrow R$ définissables et fortement bornée telles que F admet une r -reparamétrisation, alors $(F, f) : X \rightarrow R^n$ admet aussi une r -paramétrisation (où X définissable de M^m).

Soit S une r -reparamétrisation de F . Soit $\Phi \in S$. Supposons que $\Phi :]0,1[^{\dim X} \rightarrow R$. On applique l'hypothèse du lemme à $f \circ \Phi :]0,1[^{\dim X} \rightarrow R$ pour obtenir une r -reparamétrisation T_{Φ} de $f \circ \Phi$. Alors, chaque $\Psi \in T_{\Phi}$ a pour domaine $]0,1[^{\dim X}$ et, en appliquant plusieurs fois la règle de la chaîne on a que toutes les dérivées de taille $\leq r$ sont fortement bornées.

Finalement, $\{\Phi \circ \Psi : \Phi \in S, \Psi \in T_{\Phi}\}$ est la r -reparamétrisation de (F, f) souhaitée. \square

COROLLAIRE III.2.20

Soit $n \geq 1$. On suppose que $F : X \rightarrow R^n$ fortement bornée avec $X \subset R$ fortement borné. Alors, pour tout $r \geq 1$, F admet une r -reparamétrisation.

Démonstration Le résultat pour $m = 1$ est issu du corollaire III.2.18. Mais alors, d'après le lemme , on a le résultat. \square

Les résultats précédents nécessitent des fonctions à dérivées bornées. Pour s'y ramener, on va tronquer nos fonctions et trouver une reparamétrisation de ces troncutures, avant de les laisser converger vers notre fonction initiales. On a donc besoin d'un résultat sur la convergence des reparamétrisations.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\{F_t :]0,1[\rightarrow]0,1[^n : t \in]0,1[\}$$

est une famille de fonctions telle que chaque $(t, x) \mapsto F_t(x)$ est définissable sur $]0,1[^2$. Soit $r \geq 1$. On suppose de plus que chaque F_t est \mathcal{C}^r et toutes ses dérivées sont fortement bornées. De plus, via les formules du premier ordre, on sait que la fonction $F_0 :]0,1[\rightarrow]0,1[^n$ définie par $F_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_t(x)$ existe et est définissable. Montrons que F_0 est continue. Soient $x_1 \neq x_2 \in]0,1[$. Soit $t \in]0,1[$ tel que $\|F_0(x_i) - F_t(x_i)\| \leq |x_1 - x_2|$. D'autre part, l'inégalité des accroissements finis assure que :

$$\|F_t(x_1) - F_t(x_2)\| \leq Nc |x_1 - x_2|.$$

Ainsi, via une découpe en trois, on a

$$\|F_0(x_1) - F_0(x_2)\| \leq (Nc + 2) |x_1 - x_2|$$

et donc la continuité de F_0 . De même, on peut prouver que pour $i = 0, \dots, r-1$, F_0 est \mathcal{C}^i , $F_t^{(i)}$ est fortement bornée et on a convergence simple des $F_t^{(i)}$ vers $F_0^{(i)}$.

PROPRIÉTÉ III.2.21

Pour $t \in]0,1[$, on considère S_t l'ensemble des fonctions coordonnées de F_t . Supposons qu'il s'agisse d'une paramétrisation de $]0,1[$, et donc, via ce qu'on vient de voir, une r -paramétrisation de $]0,1[$. On définit S_0 l'ensemble des fonctions $\Phi|_{\Phi^{-1}(]0,1[)}$ pour $\Phi \in F_0$. Alors :

$\bigcup_{\Psi \in S_0} \text{Im}(\Psi)$ est un sous-ensemble cofini (*i. e.* de complémentaire fini) dans $]0,1[$.

Démonstration 1) Supposons qu'un nombre infini de points échappe aux images des Ψ . Puisqu'il s'agit d'un ensemble définissable de R , il existe donc un intervalle ouvert non vide de $]0,1[$ qui échappe à chacune de ces fonctions. En particulier, cet intervalle échappe à chacune des fonctions coordonnées Φ de F_0 . Or, on sait que S_t paramétrise $]0,1[$ et que les F_t convergent simplement vers F_0 : il est donc impossible que cet intervalle soit manqué par toutes les images des coordonnées de F_0 . \square

Dans toute la suite, $m \in \mathbb{N}$ est fixé.

DÉFINITION III.2.22

Soit U un ouvert définissable de R^{m+1} . On dit que V est un ouvert non-négligeable de U , et on note $V \Subset U$ s'il s'agit d'un ouvert définissable de R^{m+1} inclus dans U tel que $\dim(U \setminus V) \leq m$.

Soit $\Phi :]0,1[\rightarrow R$ définissable. On définit

$$I_\Phi : \begin{cases}]0,1[^{m+1} \longrightarrow]0,1[^{m+1} \\ (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, \Phi(x_{m+1})) \end{cases}$$

Si $X \subset R^{m+1}$ et $f : X \rightarrow R^n$ sont définissables, alors on note $f_\Phi := f \circ I_\Phi : I_\Phi^{-1}(X) \rightarrow R^n$.

LEMME III.2.23

Soit $n \geq 1$, $U \Subset]0,1[^{m+1}$ et $f : U \rightarrow R^n$ définissable, fortement bornée. On suppose de plus que pour $i = 1, \dots, m$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue, fortement bornée sur U .

Alors, pour tout $r \geq 2$, il existe une $(r-1)$ -paramétrisation S d'un sous-ensemble cofini de $]0,1[$ et un ensemble $V \Subset U$ tel que pour chaque $\Phi \in S$, on a $I_\Phi(V) \subset U$, f_Φ est \mathcal{C}^1 sur V et toutes ses dérivées premières sont fortement bornées sur V .

Démonstration Comme dans le cas du lemme 2, on peut se restreindre au cas $n = 1$.

Via le théorème de décomposition \mathcal{C}^1 -cellulaire, on sait que l'on peut considérer $W \Subset U$ tel que f est \mathcal{C}^1 sur W . Pour chaque $t, y \in]0,1[$, on définit $W_t(y)$ l'ensemble des $x \in]0,1[^m$ tels que (x, y) est à distance $\geq t$ de $]0,1]^m \times \{y\} \setminus W$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, y)$ est définie et continue sur $W_t(y)$, qui est compacte. A ce titre, elle atteint son maximum en un certain point $s_t(y) \in W_t(y)$ si cet ensemble est non-vide. Via le théorème du choix définissable II.2.23, on peut considérer une fonction $s :]0,1[^2 \rightarrow W$ qui à (t, y) associe $s_t(y)$ (dans le cas où $W_t(y)$ est vide, on peut choisir la valeur $(1/2, \dots, 1/2)$). Ainsi, on a

$$\forall t \in]0,1[, \forall y \in]0,1[, \forall x \in W_t(y) : (s_t(y), y) \in W$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(s_t(y), y) \right| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, y) \right|. \quad (*)$$

On considère maintenant les fonctions $g_t(y) := ((s_t(y), f(s_t(y), y)))$ où l'on pose arbitrairement $f = 0$ en dehors de son domaine de définition U . On obtient ainsi une famille $\{g_t :]0,1[\rightarrow]0,1[^m \times R\}$ à laquelle on peut appliquer le corollaire III.2.20. Cela donne donc pour chaque $t \in]0,1[$, une r -reparamétrisation S_t de g_t . On peut, via le théorème du choix définissable II.2.23, voir S_t comme l'ensemble des fonctions coordonnées d'une certaine fonction $F_t :]0,1[\rightarrow]0,1[^N$ ($N \in \mathbb{N}$) où la famille $\{F_t : t \in]0,1[\}$ est également définissable. On considère S_0 la limite de ces ensembles, au sens décrit dans le préambule de cette section. Via le théorème de monotonie et quitte à scinder ces fonctions, on peut considérer que chacune d'elle est constante ou injective à domaine dans un sous-intervalle ouvert de $]0,1[$. On ne considère que les fonctions non-constantes, et on les compose avec des fonctions linéaires injectives adaptées de sorte à obtenir une $(r-1)$ -paramétrisation S d'un ensemble cofini de $]0,1[$.

On pose

$$V := \left(]0,1[^{m+1} \setminus \bigcup_{\Phi \in S} I_\Phi^{-1}(]0,1[^{m+1} \setminus W) \right) \cap U.$$

Par continuité et injectivité de Φ , on a I_Φ continue et injective également. Ainsi, le complémentaire de V est un fermé en tant qu'intersection d'un fermé avec union finie d'image réciproque de fermés (W est un ouvert). Par ailleurs, puisque I_Φ est injective, on a clairement $V \Subset U$. De plus, $I_\Phi(V) \subset W \subset U$ et les f_Φ ($\Phi \in S$) sont \mathcal{C}^1 sur V . Le théorème est ainsi presque prouvé, ne reste qu'à prouver que pour $\Phi \in S$ et $(x, y) \in V$, alors $\frac{\partial f_\Phi}{\partial x_i}(x, y)$ est fini pour $i = 1, \dots, m = 1$.

On sait déjà, par hypothèse, que pour $i = 1, \dots, m$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bornée sur U . Or f_Φ a les mêmes m premières coordonnées que f et $I_\Phi(V) \subset U$: on a donc déjà le résultat pour $i = 1, \dots, m$. Reste à prouver le cas pour $i = m + 1$. On sait par construction que pour $\Phi \in S$, il existe une application linéaire λ à coefficients finis et $\Psi \in S_0$ tels que $\Phi(y) = \Psi(\lambda(y))$. Ainsi, pour prouver notre résultat, il nous suffit de prouver que pour $y \in \text{dom}(\Psi)$, on a $\Psi'(y) \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Psi(y))$ fini (avec $(x, y) \in W$). On commence par quelques constats :

i) Puisque W est ouvert, il existe une boule autour de $(x, \Psi(y))$ contenue dans W . En particulier, il existe une boule autour de x tel que pour x' dans cette boule, on a $(x', \Psi(y)) \in W$. Il existe donc $t \in]0, 1[$ tel que $x \in W_t(\Psi(y))$.

ii) Par définition de S_0 , on sait que pour chaque $t \in]0, 1[$, il existe $\Phi_t \in S_t$ de telle sorte que $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t(y) = \Psi(y)$ et (puisque $r > 1$) $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi'_t(y) = \Psi'(y)$.

iii) Ainsi, on a par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$ sur W :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Psi(y)) - \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Phi_t(y)) \right| \leq 1.$$

iv) $|\Phi'_t(y)'_\Psi(y)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Psi(y)) \right|^{-1}$ pour un t suffisamment petit, par convergence de Phi'_t vers Ψ' .

v) Soit t_0 un élément de $]0, 1[$ satisfaisant i). Soit $t' < t_0/2$ tel que $|\Psi(y) - \Phi'_t(y)| < t_0/2$. Alors $x \in W_t(\Phi'_t(y))$ pour tout $t < t'$ (car W est ouvert).

On considère un $t \in]0, 1[$ de telle sorte que iii), iv) et v) soient vérifiés. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \Psi'(y) \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Psi(y)) \right| &\stackrel{iii)}{\leq} |\Phi'_t(y)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Psi(y)) \right| + 1 \\ &\stackrel{ii)}{\leq} |\Phi'_t(y)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x, \Phi_t(y)) \right| + |\Phi'_t(y)| + 1 \\ &\stackrel{iv), (*)}{\leq} |\Phi'_t(y)| \left| \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(s_t(\Phi_t(y)), \Phi_t(y)) \right| + |\Phi'_t(y)| + 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait déjà que $|\Phi'_t(y)|$ est fini (S_t étant une r -paramétrisation). Ainsi, pour prouver le résultat, il suffit de montrer que le premier terme du membre de droite est fini. Mais, du fait que S_t est une r -paramétrisation de g_t , on déduit les constats suivants :

i) $(s_t \circ \Phi_t)'(y)$ est fini

ii) $\frac{d}{dy'} f(s_t \circ \Phi_t(y'), \Phi_t(y'))$ est fini.

Ainsi, on sait que

$$(s_t \circ \Phi_t)'(y) \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle (s_t(\Phi_t(y)), \Phi_t(y)) + \Phi'_t(y) \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(s_t(\Phi_t(y)), \Phi_t(y))$$

est fini (via vi)). Or, le premier terme est également fini grâce à v). Nécessairement, le deuxième l'est également. Finalement, le résultat est prouvé. \square

COROLLAIRE III.2.24

Soient $r, n \leq 1$, $U \Subset]0, 1[^{m+1}$ et $f : U \rightarrow R^n$ définissable fortement bornée. On suppose de plus que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{m+1}$ tel que $|\alpha| \leq r$ et $\alpha_{m+1} = 0$, on a $f^{(\alpha)}$ définie, continue et fortement bornée sur U .

Alors, pour tout $k \geq 0$, il existe $V_k \Subset U$ et une r -paramétrisation S_k d'un ensemble cofini de $]0, 1[$ tels que pour tout $\Phi \in S_k$, on a $I_\Phi(V_k) \subset U$, f_Φ est \mathcal{C}^r sur V_k et toutes ses dérivées de taille $|\alpha| \leq r$ où $a_{m+1} \leq k$ sont fortement bornées sur V_k .

Démonstration Prouvons le résultat par récurrence sur k . Comme précédemment, soit $V_0 \Subset U$ tel que f est \mathcal{C}^r sur V_0 et $S_0 = \{id_{]0, 1[}\}$. Le résultat pour $k = 0$ est donc prouvé.

Supposons le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$. Il existe donc V_k et S_k construits de sorte à vérifier les propriétés requises. Soit

$$\Delta := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1} : |\alpha| \leq r - 1, a_{m+1} \leq k\}.$$

On pose $\tilde{n} := \#\Delta \cdot \#S_k$. Il y a donc \tilde{n} $f_\Phi^{(\alpha)}$ pour $\Phi \in S_k$ et $\alpha \in \Delta$ possibles. On les note $F_1, \dots, F_{\tilde{n}}$ et on considère $F := (F_1, \dots, F_{\tilde{n}}) : V_k \rightarrow R^{\tilde{n}}$. On applique alors le lemme III.2.23 avec F, V_k, \tilde{n}, n et $r + 1$ à la place de f, U, n et r . On obtient alors une r -paramétrisation S d'un ensemble cofini T de $]0, 1[$ et $V_{k+1} \Subset V_k$ telle que pour tout $\Psi \in S$, on a $I_\Psi(V_{k+1}) \subset V_k$, F_Ψ est \mathcal{C}^r . De plus, on constate que $f_{\Phi \circ \Psi} = f \circ I_{\Phi \circ \Psi} = f_\Phi \circ I_\Psi = (f_\Phi)_\Psi$. En particulier, $f_{\Phi \circ \Psi}$ est \mathcal{C}^r sur V_{k+1} et pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $(f_\Phi^{(\alpha)})_\Psi$ est \mathcal{C}^1 et chacune de ses dérivées partielles est fortement bornée sur V_{k+1} . On définit ensuite

$$S_{k+1} := \{\Phi \circ \Psi : \Phi \in S_k, \Psi \in S\}.$$

On constate que :

$$\bigcup_{\Phi \circ \Psi \in S_{k+1}} \text{Im}(\Phi \circ \Psi) = \bigcup_{\Phi \in S_k} \text{Im}(\Phi) = T$$

Il ne reste donc à montrer que pour $|\alpha| \leq r$, $\alpha_{m+1} \leq k+1$ et $\Phi \circ \Psi \in S_{k+1}$, on a $(f_{\Phi \circ \Psi})^{(\alpha)}$ est fortement borné sur V_{k+1} . Si jamais $\alpha_{m+1} = 0$, alors $(f_{\Phi \circ \Psi})^{(\alpha)} = (f_{\Phi}^{(\alpha)})_{\Psi}$ qui est fortement bornée. Sinon, on constate qu'il existe $\beta \in \Delta$ tel que $(f_{\Phi \circ \Psi})^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} (f_{\Phi \circ \Psi})^{(\beta)}$. De plus, pour $a \in V_{k+1}$:

$$(f_{\Phi \circ \Psi})^{(\beta)}(a) = \Psi^{(\alpha_{m+1}-1)}(a_{m+1})(f_{\Phi}^{(\beta)})_{\Psi}(a).$$

Ainsi :

$$(f_{\Phi \circ \Psi})^{(\alpha)}(a) = \Psi^{(\alpha_{m+1})}(a_{m+1})(f_{\Phi}^{(\beta)})_{\Psi}(a) + \Psi^{(\alpha_{m+1}-1)}(a_{m+1}) \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} (f_{\Phi}^{(\beta)})_{\Psi}(a)$$

est fini (car $\alpha_{m+1} \leq |\alpha| \leq r$ donc les dérivées de Ψ sont fortement bornées, et $\beta \in \Delta$ donc les dérivées de f le sont aussi). \square

On peut enfin passer à la preuve des deux théorèmes de paramétrisation de Yomdin-Gromov. On note I_m le résultat pour un ensemble de $]0,1[^m$ dans R^n et II_m le résultat pour une fonction pour $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration On procède par récurrence sur m .

On constate que $(I)_1$ est vraie via le corollaire III.2.20 et que $(II)_0$ est clairement vérifiée (via les fonctions linéaires et constantes).

On suppose $(I)_l$ et $(II)_{l-1}$ pour $1 \leq l \leq m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Prouvons que $(I)_{m+1}$ et $(II)_m$ sont également vérifiées. Commençons par $(II)_m$.

Soit $r \geq 1$, $X \subset R^{m+1}$ définissable et fortement borné. Par le théorème de décomposition cellulaire, on peut clairement se ramener au cas où X est une cellule (il suffit de prendre l'union des paramétrisations de chaque cellule). Supposons que X est une bande $(f,g)_Y$ où Y est une cellule de R^m . Par $(II)_{m-1}$, il existe une r -paramétrisation S de Y . Pour chaque $\Phi \in S$, on considère la fonction

$$(f \circ \Phi, g \circ \Phi) :]0,1[^{\dim Y} \rightarrow R^2.$$

Puisque $\dim(Y) < \dim(X) \leq m+1$, on peut utiliser $(I)_{\dim Y}$ pour obtenir un r -reparamétrisation T_{Φ} de cette fonction. Pour chaque $\Psi \in T_{\Phi}$, on définit alors (en notant $l := \dim Y$) :

$$\theta_{\Phi, \Psi} : \left\{ \begin{array}{l}]0,1[^{l+1} \rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_{l+1}) \mapsto (\Phi \circ \Psi(x_1, \dots, x_l), (1-x_{l+1})f \circ \Phi \circ \Psi(x_1, \dots, x_l) + x_{l+1}g \circ \Phi \circ \Psi(x_1, \dots, x_l)) \end{array} \right.$$

On constate que $\Theta := \{\theta_{\Phi, \Psi} : \Phi \in S, \Psi \in T_{\Phi}\}$ est bien une r -paramétrisation de X , d'où $(II)_m$.

Montrons maintenant $(I)_{m+1}$. Via le lemme 2, il suffit de le prouver dans le cas $n = 1$. Soit $r \geq 1$ et $F :]0,1[^{m+1} \rightarrow R$ définissable fortement bornée. Pour chaque $u \in]0,1[$, on considère

$$F_u : \left\{ \begin{array}{l}]0,1[^m \rightarrow R \\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto F((x_1, \dots, x_m), u) \end{array} \right.$$

Via $(I)_m$, on obtient une r -reparamétrisation S_u de F_u . On utilise alors le théorème du choix définissable II.2.23 pour obtenir une famille définissable de fonctions $\{(1)\Phi_u : u \in]0,1[, \dots, \{(N)\Phi_u : u \in]0,1[\}$ de telle sorte que $S_u = \{(1)\Phi_u, \dots, (N)\Phi_u\}$ (en d'autres termes, S_u est une r -reparamétrisation de F_u uniformément en u). Pour $j = 1, \dots, N$, on définit

$${}^{(j)}F : \left\{ \begin{array}{l}]0,1[^{m+1} \rightarrow R \\ (x, u) \mapsto F^{(j)}\Phi(x, u), u \end{array} \right.$$

et

$$*F := \left((1)\Phi, \dots, (N)\Phi, (1)F, \dots, (N)F \right) :]0,1[^{m+1} \rightarrow R^{mN+N}.$$

On constate que l'on peut appliquer le corollaire III.2.24 avec $*F,]0,1[^{m+1}$ et $mN+N$ à la place de f, U et n , dans le cas $k = r$. On obtient alors $V_r \in]0,1[^{m+1}$ et S_r avec les propriétés du corollaire.

Si $V_r =]0,1[^{m+1}$ et S_r était une r -paramétrisation de $]0,1[$ tout entier, alors on pourrait considérer les fonctions ${}^{(j)}\Phi_{\Psi}$ pour $j = 1, \dots, N$ et $\Psi \in S_r$: on obtiendrait la r -reparamétrisation souhaitée de F .

Ici, on sait seulement que l'union des images de ces fonctions recouvre $]0,1[^{m+1}$ privé d'un nombre fini de plans $\{x_{m+1} = a\}$. Ainsi, si on restreint ces fonctions à l'ouvert V_r (où elles sont C^r et à dérivées fortement bornées), alors l'union de leurs images recouvre un ensemble de $]0,1[^{m+1}$ de codimension l , où $l \leq m$.

Via $(II)_m$, on considère T_1 une r -paramétrisation de V_r et T_2 une r -paramétrisation de $]0,1[^{m+1} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq N} \Phi_{\Psi}^{(j)}(V_r)$ (qui est donc de dimension l). Pour chaque $\theta \in T_2$, on applique $(I)_l$ pour obtenir une r -reparamétrisation U_{θ} de la fonction $F \circ \theta :]0,1[^l \rightarrow R$. On regarde alors

$$\{ {}^{(j)}\Phi_{\Psi} \circ \chi : j = 1, \dots, N, \Psi \in S_r, \chi \in T_1 \} \cup \{ \theta \circ \lambda : \theta \in T_2, \lambda \in U_{\theta} \}$$

où l'on a étendu les fonctions définies sur $]0,1[^l$ sur $]0,1[^m$, sans que les variables ajoutées influent sur leurs valeurs. Cet ensemble est la r -reparamétrisation souhaitée de F , d'où finalement $(I)_{m+1}$. \square

COROLLAIRE III.2.25

Soient $m, r \geq 1$ et $X \subset]0, 1[^m$ définissable.

Il existe un ensemble fini S de fonctions de $]0, 1[^{\dim X}$ dans X telles que :

- Chaque $\Phi \in S$ est \mathcal{C}^r ,
- $\bigcup_{\Phi \in S} \text{Im}(\Phi)X$,
- $|\Phi^{(\alpha)}| \leq 1$ sur $]0, 1[^{\dim X}$ pour tout $\Phi \in S$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\dim(X)}$ avec $|\alpha| \leq r$.

3 Méthode du déterminant de Bombieri

L'objectif de cette section est de prouver que les points rationnels d'un ensemble définissable X d'une hauteur maximale H sont contenus dans un nombre majoré d'hypersurfaces de degré d (à $d \in \mathbb{N}$ fixé). Pour ce faire, on utilise la méthode du déterminant de Bombieri. [6]

DÉFINITION III.3.26 *Hauteur d'un rationnel*

On définit l'application *hauteur* H sur la rationnels par :

$$H\left(\frac{p}{q}\right) = \max(|p|, q).$$

On étend la définition aux uplets de rationnels par :

$$H(r_1, \dots, r_n) = \max(H(r_1), \dots, H(r_n)).$$

Pour un ensemble définissable X , on note $X(\mathbb{Q}, H)$ l'ensemble des points à coordonnées rationnels de X de hauteur $\leq H$.

THÉORÈME III.3.27

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ définissable fortement borné, $H \geq 1$ et $d \in \mathbb{N}$. On note k la dimension de X .

Il existe $C(k, n, d)$ et $\varepsilon(k, n, d)$ tels que $X(\mathbb{Q}, H)$ est contenu dans l'union d'au plus

$$C(k, n, d)H^{\varepsilon(k, n, d)}$$

hypersurfaces de degré au plus d . De plus, $\varepsilon(k, n, d)$ tend vers 0 lorsque d tend vers $+\infty$.

Démonstration Par souci de commodité, on montre le résultat dans le cas où $n = 1$ (les autres cas se traitent de la même façon).

Soit X un définissable fortement borné, $d \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Yomdin-Gromov pour les ensembles, il existe une r -paramétrisation S de X de telle sorte que toutes les dérivées de taille $\leq r$ soient fortement bornées par 1. Soit $\Phi \in S$. On travaille sur $\text{Im } \Phi$ (si le résultat est prouvé pour $\text{Im } \Phi$ qui est bien définissable, il sera prouvé pour X puisque les fonctions Φ sont en nombre fini). On considère $\text{Im } \Phi(\mathbb{Q}, H)$, les rationnels sous une certaine hauteur H de cet ensemble. Soit $t > 0$. On peut décomposer l'ensemble $]0, 1[^n$ en un nombre fini de boules de rayon t (il suffit de considérer un recouvrement du compact $[0, 1]^n$ en boules de ce rayon, d'en extraire un sous-recouvrement fini et de l'intersecter avec $]0, 1[^n$). On travaille sur chacun de ces ensembles.

S'il y a moins de d rationnels dans l'image de cette boule par Φ , ils appartiennent à une même hypersurface, prouvant le résultat. On suppose qu'il y en a au moins $d + 1$. On considère alors $\Phi(z^{(1)}), \dots, \Phi(z^{(d)})$ où les $z^{(i)}$ sont à distance $\leq t$ les uns des autres, et la matrice $M := (\Phi^i(z^{(j)}))_{1 \leq i, j \leq d}$. Notre premier but est de montrer que le déterminant de cette matrice est nul.

Pour ce faire, on commence par factoriser la matrice par les dénominateurs de chacun de ses coefficients (on rappelle qu'il ne s'agit que de rationnels). En d'autres termes :

$$(\Phi^i(z^{(j)}))_{1 \leq i, j \leq d} = \frac{1}{p_1 \dots p_{d^2}} A$$

où A est une matrice à coefficients entiers. A ce titre, son déterminant est soit nul, soit plus grand que 1. On suppose par l'absurde que ce déterminant est plus grand que 1. Par ailleurs, chacun des rationnels étant de hauteur maximale H , on peut minorer :

$$H^{-d^2} \leq \frac{1}{p_1 \dots p_{d^2}}.$$

Ainsi, puisque $\det(A) \geq 1$:

$$H^{-d^2} \leq \det(M).$$

Maintenant, nous allons essayer de majorer $\det(M)$ afin d'obtenir une contradiction. Pour ce faire, on utilise la formule de Taylor-Lagrange pour chaque $2 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d$: il existe $\xi_{i,j}$ dans notre boule tel que

$$\Phi^j(z^{(i)}) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\Phi^j)^{(k)}(z^{(1)})}{k!} (z^{(i)} - z^{(1)})^k + \frac{(\Phi^j)^{(r)}(\xi_{i,j})}{r!} (z^{(i)} - z^{(1)})^r.$$

On remplace donc chaque rationnel par son expression de Taylor-Lagrange, puis on développe le déterminant. On obtient donc une somme de déterminants, dont les colonnes correspondent à un certain degré de dérivée de nos fonctions, plus possiblement le terme résiduel pour certains termes. Ceux ayant des colonnes avec le même ordre de dérivées sont nuls. Il ne reste finalement qu'une somme de déterminants dont les colonnes contiennent des dérivées d'ordres différents. On peut factoriser par les puissances de $z^{(i)} - z^{(1)}$. On obtient un terme de la forme $\prod_i (z^{(i)} - z^{(1)})^{\alpha_i}$. Ce terme est majoré par $t^{\sum \alpha_i}$.

D'autre part, on peut majorer le déterminant restant, puisqu'il ne s'agit que de dérivées fortement bornées par 1. Ainsi, notre déterminant est majoré par $c't^{\sum \alpha_i}$ où c' est une constante, produit de factoriels ne dépendant pas du choix initial des rationnels. Mais alors, en choisissant t suffisamment petit (par exemple $t := (H^{-d^2}/c')^{1/V}$ où $V > dr > \sum \alpha_i$, où l'on choisit r de telle sorte que $d^2/V \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$), on trouve $\det(M) < H^{-d^2}$, ce qui est absurde. Finalement, on obtient bien $\det(M) = 0$.

Ainsi, peu importe notre choix initial de points rationnels, on obtient une matrice de déterminant nul. Toutes ces matrices sont donc de rang $\leq d$. On note alors k le rang maximal de toutes ces matrices (on a donc $k < d$), et on considère un mineur M d'une telle matrice de rang k . M est donc constituée de certaines dérivées et de certaines puissances de Φ . On complète cette matrice en ajoutant une colonne constituée de puissance de X (l'indéterminée polynomiale) adaptée à la puissance de la ligne et en ajoutant une ligne constituée des bonnes dérivées et puissances de Φ , on obtient alors un polynôme

$$P_d(X) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & X^{\beta_1} \\ & & & \vdots \\ & M' & & X^{\beta_k} \\ \hline a_1 & \dots & a_k & X^{\beta_{k+1}} \end{array} \right)$$

de degré $\leq \max(\beta_i) \leq d$. En évaluant ce polynôme en n'importe quel rationnel de notre pavé initial, on tombe sur le déterminant d'une sous-matrice d'une des matrices de rang $\leq k$ construite précédemment. Or cette sous-matrice est de taille $k + 1$: à ce titre, le déterminant est nul et donc le polynôme est nul en chacun des rationnels de notre boîte. Ainsi, tous ces rationnels appartiennent à une même hypersurface de degré $\leq d$. Enfin, $]0,1[$ peut être recouvert par $(c'H^{d^2})^{1/V}$ boules de rayon désiré, d'où le résultat. □

4 Comptage de points rationnels

Cependant, se restreindre à la partie transcendante d'un définissable n'est pas toujours satisfaisant. Par exemple, on considère l'ensemble $X := \{(x,y,z) \in R^3 : 2 < x, y < 3, z = x^y\}$. Soit un rationnel (q_1, q_2, q_3) de cet ensemble. Dans ce cas, ce rationnel appartient à la courbe $\{(x, x^{q_2}) : 2 < x\}$. Cette courbe étant à la fois semi-algébrique et connexe, elle est dans X^{alg} . Ainsi, on a $X \setminus X^{\text{alg}}(\mathbb{Q})$ qui est vide : un résultat majorant le nombre de points rationnels sur cet ensemble n'a aucun intérêt. Lorsque X^{alg} n'est pas définissable, on peut se ramener à un plus petit ensemble définissable contenu dans X^{alg} de telle sorte que le résultat sur le nombre de points rationnels de X privé de cette partie ne soit pas totalement trivial. C'est là le but du théorème suivant :

THÉORÈME III.4.28

Soit Z une famille définissable, $\varepsilon > 0$. Il existe une famille définissable $W := W(Z, \varepsilon)$ telle que pour $y \in Y_z$, en notant $X := X_{Z,y}$ et $X_\varepsilon = X_{W,y}$, on a $X_\varepsilon \subset X^{\text{alg}}$ et

$$\#(X \setminus X_\varepsilon)(\mathbb{Q}, H) = O_{Z,\varepsilon}(H^\varepsilon).$$

Démonstration

Admis. Se référer à [5] p.611, théorème 1.10. □

Toutefois, ce résultat peut encore être améliorer. Si on considère cette fois $X := \{(x,y,z) \in R^3 : 2 < x, y < 3, z = 2^{x+y}\}$, on constate que tout point est dans une courbe $\{(x,y,z) : x + y = c \text{ et } z = 2^c\}$: cette fois, on a carrément $X = X^{\text{alg}}$, et les deux théorèmes donnent des résultats triviaux. Pourtant, nous allons mettre en place un affinement de ces deux résultats donnant un résultat non trivial sur le nombre de rationnel de hauteur $\leq H$ sur une partie de X^{tran} .

On arrive au dernier - et principal - résultat de cette étude : nous allons pouvoir majorer le nombre de rationnels dans un sous-ensemble de la partie transcendante d'un ensemble définissable. Un premier résultat avait été démontré par J. Wilkie et J. Pila, mais ce dernier est revenu dessus quelques années plus tard apportant une nouvelle approche du problème en introduisant la notion de blocs basiques. Le résultat est alors plus fort, excluant moins de points.

DÉFINITION III.4.29 *Bloc basique*

1. Un *bloc basique* de dimension $k \in \mathbb{N}$ dans R^n est un ensemble définissable connexe $U \subset R^n$ de dimension k contenu dans un ensemble semi-algébrique A de dimension k de telle sorte que chaque point x de U est un point régulier de dimension k de U et de A .
2. Un *bloc* est l'image d'un bloc basique U par une fonction semi-algébrique continue $\Phi : A \rightarrow R^m$ où A est un ensemble semi-algébrique contenant U .
3. Une *famille de blocs basiques* est une famille définissable dont les fibres sont blocs basiques.
4. Une *famille de blocs* est une famille $W \subset R^l \times R^m$ d'images d'une famille de blocs basiques $Z \subset R^n \times R^m$ par une fonction semi-algébrique continue $\Phi : A \rightarrow R^l$ où A est un ensemble semi-algébrique contenant toutes les fibres de Z .

◇ REMARQUE.

En particulier, les points sont des blocs basiques de dimension 0.

PROPOSITION III.4.30

Soit $X \subset R^n$ définissable.

- 1) Soit $U \subset X$ un bloc basique de dimension $k > 0$. Alors $U \subset X^{\text{alg}}$.
- 2) Soit $U \subset X$ un bloc de dimension $k > 0$. Alors $U \subset X^{\text{alg}}$.
- 3) Soit W famille de blocs basiques telle que chaque fibre de W est dans X et toutes les fibres ont la même dimension $k > 0$. Alors l'union des fibres est définissable et est dans X^{alg} .
- 4) Soit W une famille de blocs telle que chaque fibre de W est dans X . Alors, l'union des fibres de dimensions non nulle est définissable et est dans X^{alg} .

Démonstration

1) Soit A un ensemble semi-algébrique associé au bloc basique U . Soit $x \in U$. On sait qu'il existe une boule B_x autour de x telle que $B_x \cap A$ est une \mathcal{C}^1 sous-variété de dimension k dans A . Or, si l'on prend la boule suffisamment petite, $B_x \cap A$ est connexe non réduit à un point (puisque une variété est localement connexe). Ainsi, on a $B_x \cap A$ qui est connexe et semi-algébrique (intersection de deux semi-algébriques) de dimension non nulle. De fait, $B_x \cap A \subset X^{\text{alg}}$, et donc $x \in X^{\text{alg}}$.

2) Soit V le bloc basique dont l'image par Φ semi-algébrique continue est U . Soit $x, y \in U$ distincts. On considère P, Q deux pré-images de x, y par Φ . Par hypothèse, V est connexe, donc en particulier connexe par arcs (parce que V est définissable).

Soit $g : [0, 1] \rightarrow V$ chemin reliant P à Q . On sait que $g([0, 1])$ est un compact : à ce titre, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules. Sur chacune de ces boules B , on peut remplacer la portion correspondante de $g([0, 1])$ par un chemin semi-algébrique (via le lemme de sélection de courbe, appliqué à \mathcal{SA}). On a ainsi exhibé un chemin semi-algébrique joignant P à Q . Or, l'image de ce chemin par une application semi-algébrique continue est un ensemble connexe par arcs (donc connexe) semi-algébrique de dimension non-nulle, qui contient x , d'où le résultat.

3) Soit $W \subset R^n \times R^m$. L'union des fibres de W , que l'on note A , est exactement la projection sur les n -premières coordonnées de W : elle est donc bien définissable. Soit $x \in A$. Il existe $y \in R^m$ de telle sorte que $x \in W_y$. En particulier, W_y contient un ensemble connexe et semi-algébrique $B_x \cap W_y$ de dimension non-nulle. Ainsi, $x \in X^{\text{alg}}$ et donc $A \subset X^{\text{alg}}$.

4) L'union des fibres de dimensions non nulle est exactement la projection sur les n -premières coordonnées de W privé de l'ensemble des fibres réduites à un point. A ce titre, il s'agit bien d'un ensemble définissable. Enfin, chaque fibre de dimension non nulle est incluse dans X^{alg} d'après le point 2), d'où le résultat. \square

THÉORÈME III.4.31 *Théorème final*

Soit $Z \subset R^n \times R^m$ famille définissable et $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $J = J(Z, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ et une collection de familles de blocs basiques $W_j \subset R^n \times (R^m \times R^{\mu_j})$ ($j = 1, \dots, J$) de telle sorte que chaque point de chaque fibre de W_j est régulier de dimension w_j et vérifie les points suivants :

- i) Pour tout j et $(y, \eta) \in R^m \times R^{\mu_j} : X_{W_j, (y, \eta)} \subset X_{Z, y}$
- ii) Si X est une fibre de Z et $H \geq 1$, alors $X(\mathbb{Q}, H)$ est contenu dans $O_{Z, \varepsilon}(H^\varepsilon)$ blocs basiques, qui sont des fibres de l'un des W_j en un certain point.
- iii) Soit $W = W(Z, \varepsilon)$ la famille dont la fibre en y est l'union des fibres de tous les W_j au-dessus de y pour les j tels que $w_j > 0$. Alors W est définissable. De plus, si X_ε est une fibre de W en y , alors $X_\varepsilon \subset X^{\text{alg}}$ et $\#X \setminus X_\varepsilon(\mathbb{Q}, H) = O_{Z, \varepsilon}(H^\varepsilon)$.

Démonstration On commence par simplifier le cadre de notre étude. On constate que l'ensemble des points rationnels sous une hauteur H est stable par les applications $x \mapsto \pm x^{\pm 1}$. De plus, l'image d'un bloc basique par une de ces applications reste un bloc basique. On peut donc supposer que $Z \subset]0, 1[^n \times R^m$.

De plus, si $Z = A \cup B$ où A et B sont deux familles définissables, alors il suffit de prouver le résultat pour A et pour B pour l'obtenir sur Z (puisque $\forall y \in Y_Z, X_{A,y}^{\text{alg}} \cup X_{B,y}^{\text{alg}} = X_{Z,y}^{\text{alg}}$).

On définit la notion de dimension fibrée d'une famille définissable Z : il s'agit du maximum des dimensions des fibres Z_y . On prouve le résultat par récurrence sur la dimension fibrée k de Z .

Si $k = 0$: chaque fibre de Z est finie. Ainsi, d'après le théorème de finitude uniforme : il existe $c(Z)$ tel que chaque fibre de Z contient au plus $c(Z)$ points. Via le théorème III.1.9 de décomposition fibrée, il existe des familles Z_j ($1 \leq j \leq J \leq c(z)$) dont les fibres sont un point de la fibre de Z correspondante (les composantes connexes des fibres sont les points, puisqu'elles sont finies). Chaque fibre est donc un bloc basique (de dimension 0) : les Z_j sont des familles de blocs basiques vérifiant les hypothèses du théorème.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k = n$: pour $x \in \text{reg}_k(X)$ avec X de Z , on sait que X contient une boule ouverte de R^n contenant x . Mais alors, la composante connexe de x est un bloc basique (l'ensemble semi-algébrique vérifiant les hypothèses étant alors R^n tout entier). Plus particulièrement, toutes les composantes connexes de $\text{reg}_k(X)$ sont des blocs basiques. D'autre part, la famille $R_k(Z) := \{(x,y) : x \in \text{reg}_k(X_y)\}$ est définissable et les familles de ses composantes connexes issues du théorème III.1.9 de décomposition fibrée satisfont les résultats du théorème. On obtient donc le résultat pour $R_k(Z)$, puis on constate que $Z \setminus R_k(Z)$ est de dimension fibrée $k - 1$: on lui applique l'hypothèse de récurrence, ce qui donne le résultat pour Z .

Maintenant, supposons $k < n$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit X une fibre de Z . On considère X_{proj} projection de X sur R^{k+1} sur n'importe quelles $k + 1$ coordonnées. On sait alors, d'après le théorème III.3.27 que $X_{\text{proj}}(\mathbb{Q}, H)$ est inclus dans l'union d'au plus $\alpha(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2^{n+1}}$ hypersurfaces de degré $d(Z, \varepsilon)$.

Soit $\Sigma := \Sigma_{n,k+1,d} \subset R^n \times R^m$ la famille des ensembles algébriques de R^n satisfaisant une relation de degré $\leq d$ pour chaque choix des $k + 1$ coordonnées. Ainsi, les fibres de Σ sont exactement les intersections des cylindres sur les hypersurfaces de degré $\leq d$ pour chaque choix de $k + 1$ coordonnées, et ont une dimension d'au plus k .

On regarde maintenant Z et Σ en tant que familles de $R^n \times (R^m \times R^M)$ (leurs fibres restent indépendantes des nouvelles variables). De plus, on sait qu'on a au plus 2^n choix de $k + 1$ variables parmi n variables. Ainsi, d'après ce qui précède, les projections d'une fibre X sur $k + 1$ choix de coordonnées ont des rationnels de hauteur $\leq H$ inclus dans au plus $\alpha(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2^{n+1}}$ hypersurfaces de degré d , en plus d'être inclus dans Z . De fait, chacune de ces projections a ses rationnels dans au plus $\alpha(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2^{n+1}}$ fibres de $Z \cap \Sigma$. Ainsi, les rationnels de X de hauteur $\leq H$ sont inclus dans au plus $\beta(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2}$ fibres de $Z \cap \Sigma$.

On distingue maintenant trois sous-familles de $Z \cap \Sigma$. Dans la suite, (y, η) désigne des variables dans $R^m \times R^M$. On définit :

$$A_1 := \{(x, (y, \eta)) \in Z \cap \Sigma : x \notin \text{reg}_k(X_{Z \cap \Sigma, (y, \eta)})\}.$$

A_1 est donc l'ensemble des points qui ne sont pas réguliers de dimension k dans une fibre de $Z \cap \Sigma$. Puisque $Z \cap \Sigma$ est de dimension fibrée $\leq k$, la dimension fibrée de A_1 est $\leq k - 1$. De ce fait, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour cet ensemble. Ensuite, on définit

$$A_2 := \{(x, (y, \eta)) \in Z \cap \Sigma : x \notin \text{reg}_k(X_{\Sigma, (y, \eta)})\}$$

et

$$A_3 := \{(x, (y, \eta)) \in Z \cap \Sigma : x \notin \text{reg}_k(X_{Z, (y, \eta)})\}.$$

De la même façon, ces ensembles sont de dimension fibrée $\leq k - 1$ et l'hypothèse de récurrence s'applique à ces ensembles.

On considère maintenant $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Soit $P = (x, (y, \eta)) \in Z \cap \Sigma \setminus A$. Ainsi, pour une boule suffisamment petite B_x autour de x dans R^n , on a que chaque fibre $X_{Z \cap \Sigma, (y, \eta)}, X_{Z, (y, \eta)}$ et $X_{\Sigma, (y, \eta)}$ est une \mathcal{C}^1 sous-variété de R^n de dimension k . De plus, puisque

$$X_{Z \cap \Sigma, (y, \eta)} \subset X_{\Sigma, (y, \eta)} \text{ et } X_{Z, (y, \eta)}$$

on peut choisir B_x suffisamment petite de sorte que ses intersections avec chacun de ces ensembles coïncident. L'ensemble $X_{\Sigma, (y, \eta)} \cap B_x$ est semi-algébrique (car Σ l'est), ainsi les composantes connexes des fibres de $Z \cap \Sigma \setminus A$ sont des blocs basiques. Ainsi, en appliquant le théorème III.1.9 de décomposition fibrée, on a $Z \cap \Sigma \setminus A$ est une union finie de familles de blocs basiques B_j .

Pour conclure, soit X une fibre de Z . D'après tout ce qui précède, on sait que :

- $X(\mathbb{Q}, H)$ est contenu dans l'union d'au plus $\beta(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2}$ fibres de $Z \cap \Sigma$, donc de fibres des A_i, B_j .
- Chaque fibre des B_j est un bloc basique
- Chaque fibre X' des A_i est telle que $X'(\mathbb{Q}, H)$ est contenu dans au plus $\delta(Z, \varepsilon)H^{\varepsilon/2}$ fibres d'un nombre fini de famille de blocs basiques (qui sont donc des blocs basiques) par hypothèse de récurrence.

Finalement, en considérant l'union de toutes ces familles, on obtient le résultat pour Z : le théorème est prouvé. \square

Bibliographie

Jérôme Milot - Encadré par Georges Comte

- [1] M. Coste. *An introduction to semialgebraic geometry*. Institut de recherche mathématiques de Rennes, Rennes, 2002.
- [2] M. Coste. *An introduction to O-minimal geometry*. Institut de recherche mathématiques de Rennes, Rennes, 1999.
- [3] L. Van den Dries. *Tame topology and O-minimal structures*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [4] J. Pila. On the algebraic points of a definable set. *Selecta Mathematica New Series*, 15 :151–170, 2009.
- [5] J. Pila et J. Wilkie. The rational points of a definable set. *Duke Math*, 133 :591–616, 2006.
- [6] J. Pila. Integer points on the dilation of a subanalytic surface. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 55 :207–223, 2004.
- [7] C. Miller. Exponentiation is hard to avoid. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122 :257–259, 1994.
- [8] M. Rosenlicht. The rank of a hardy field. *Transactions of the American Mathematical Society*, 280 :659–671, 1983.

IV Annexe

1 Quelques résultats supplémentaires

(i) Théorème de décomposition \mathcal{C}^k II.2.29 II.2.30.

Dans cette section, nous démontrons le résultat de décomposition cellulaire \mathcal{C}^k .

PROPOSITION IV.1.1 *Préliminaire*

Soient $f : R \rightarrow R$ définissable et $k \in \mathbb{N}$.

Il existe un nombre fini de points de R en dehors desquels f est \mathcal{C}^k .

Démonstration On montre le résultat pour $k = 1$ (il suffit ensuite d'appliquer le résultat k fois).

Soit $x \in R$. La fonction

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est définissable, et admet donc une limite (peut-être infinie) lorsque $h \rightarrow 0$. De fait, pour tout $x \in R$, $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ sont bien définies. On peut donc définir f'_d et f'_g , qui sont définissables (en tant que limites de fonctions définissables). Montrons que l'ensemble des points en lesquels f'_d vaut ∞ est fini (il en sera de même pour f'_g).

Via le théorème de monotonie, on peut se ramener au cas d'un intervalle I sur lequel f est continue. Par l'absurde, supposons que l'ensemble

$$\{x \in I : f'_d(x) = +\infty\}$$

est infini. Alors, par o-minimalité, il contient un certain intervalle. On appelle toujours I cet intervalle. Dans ce cas, f est strictement croissante. En effet, dans le cas contraire, le théorème de monotonie assurerait que f serait constante ou strictement décroissante sur un sous-intervalle de I , et cela contredirait la positivité de f'_d sur cet intervalle. De fait, on récupère également $f'_g \geq 0$ sur I .

Puis, par o-minimalité et quitte à se restreindre à un intervalle plus petit, on peut supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

i) $f'_g = \infty$ sur I ,

ii) f'_g est continue et à valeurs dans R sur I .

Dans le premier cas, la bijection réciproque de f (bien définie puisque f est strictement croissante sur notre intervalle) vérifie pour tout $y \in f(I)$:

$$(f^{-1})'_d(y) = (f^{-1})'_g(y) = 0.$$

Ainsi, f^{-1} est constante sur $f(I)$ et n'est donc pas bijective, ce qui est absurde.

Dans le second cas, on a donc $f'_d > f'_g$ sur I . Soit $c \in R$ tel que $f'_d > c > f'_g$ sur un sous-intervalle J de I . On définit la fonction

$$g : \begin{cases} J \longrightarrow R \\ x \longmapsto f(x) - cx \end{cases}.$$

Cette fonction vérifie $g'_d > 0$ et $g'_g < 0$ sur J : à ce titre, g est donc strictement décroissante et strictement croissante sur J , ce qui n'est pas possible.

Finalement, il reste que f'_d et f'_g ne prennent une valeur infinie qu'en un nombre fini de points. Par ailleurs, d'après le théorème de monotonie, f'_d et f'_g sont continues sur R sauf en un nombre fini de points. On considère la réunion de ces points. Sur chaque intervalle entre ces points, f'_d et f'_g sont donc continues à valeurs réelles. A ce titre, elles sont donc égales sur ces intervalles (sinon, par l'absurde, on pourrait placer un point entre elles sur un intervalle, et on retomberait sur la même contradiction que plus haut).

En conclusion, f est dérivable en dehors d'un nombre fini de points. En appliquant le théorème de monotonie à f' sur chacun des intervalles où elle est bien définie, on obtient finalement f' continue en dehors d'un nombre fini de points. □

THÉORÈME IV.1.2 *Décomposition cellulaire \mathcal{C}^k $\mathcal{D}^k(n)$*

Soient $n, k \in \mathbb{N}$.

Soit A_1, \dots, A_l des ensembles définissables de R^n .

Il existe une \mathcal{C}^k -dcdc définissable adaptée aux A_1, \dots, A_l .

THÉORÈME IV.1.3 *Caractère \mathcal{C}^k par cellules $\mathcal{C}^k(n)$*

Soient A et $f : A \rightarrow R$ définissables.

Il existe une \mathcal{C}^k -dcdc adaptée à A telle que la restriction de f sur chaque cellule de cette décomposition est \mathcal{C}^k .

Démonstrations simultanées

Pour la même raison que précédemment, on peut se contenter de prouver le résultat pour $k = 1$, puis l'appliquer autant de fois que nécessaire aux différentes dérivées partielles de f . On prouve donc les résultats par récurrence sur n .

$n = 1$ on a directement $\mathcal{C}^1(1)$ via la proposition précédente. De plus, $\mathcal{C}^1(1)$ est évidemment vraie (on rappelle que les cellules ici ne sont qu'un point ou un intervalle ouvert).

$n \in \mathbb{N}$ on constate que, comme dans les preuves des théorèmes de décomposition cellulaire et de continuité par morceaux, on a $(\mathcal{C}^1(n) \text{ et } \mathcal{D}^1(n)) \implies \mathcal{D}^1(n+1)$. Il ne reste donc qu'à prouver $\mathcal{C}^1(n+1)$.

Via $\mathcal{D}^1(n+1)$, on considère D une cellule ouverte d'une \mathcal{C}^1 -dcdc de R^{n+1} . Quitte à raisonner à \mathcal{C}^1 -difféomorphisme près (tous nos raisonnements demeurent valables), on peut supposer que $D = D' \times]a, b[$.

Alors d'après la proposition précédente, pour tout $p \in D'$ il existe $\alpha(p), \beta(p) \in]a, b[$ tels que $\alpha(p) < \beta(p)$ et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$ est définie et \mathcal{C}^1 sur $\{p\} \times]\alpha(p), \beta(p)[$. Par le théorème du choix définissable II.2.23, on peut considérer α et β des fonctions définissables sur D' et à valeurs dans $]a, b[$. Via le théorème de continuité par morceaux on peut supposer, quitte à réduire D' , que ces fonctions sont continues sur D' . Mais alors, quitte à réduire $]a, b[$, on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$ est définie et \mathcal{C}^1 sur $D' \times]a, b[$. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence $\mathcal{C}^1(n)$ à $f : D$, puisqu'ouvert, contient un point autour duquel f est \mathcal{C}^1 . Puis, via $\mathcal{D}^1(n+1)$, on peut considérer une \mathcal{C}^1 -dcdc de R^{n+1} adaptée à l'ensemble \mathcal{E}^1 des points de R^{n+1} au voisinage desquels f est \mathcal{C}^1 (cet ensemble est bien définissable). D'après ce qui précède, une cellule ouverte de notre décomposition initiale rencontre \mathcal{E}^1 . De fait, elle coïncide avec une cellule de la nouvelle décomposition initiale, sur laquelle f est \mathcal{C}^1 par définition.

Enfin, si l'on considère une cellule fermée, il suffit de considérer une cellule ouverte de R^d avec $d < n+1$ à laquelle cette cellule est difféomorphe. On retrouve le même raisonnement, et donc le résultat final. \square

(ii) **Caractéristiques d'Euler des boules**

LEMME IV.1.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une dcdc de R^n adaptée à B_n de la forme :

$$B_n = C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \overset{\circ}{B}_n$$

où les C_i sont des cellules de dimension $< n$.

Démonstration Par récurrence sur n .

$\underline{n = 1}$ $B_1 = [-1, 1] = \{-1\} \cup \{1\} \cup]-1, 1[$.

$\underline{n \geq 1}$ On suppose le résultat acquis au rang n . On a alors un nombre de cellules de dimension $< n$ k fixé. On fixe une hauteur arbitraire pour le "plan équatorial", disons O . On pose alors, pour tout $i \in [1, k]$:

$$f_i : \begin{cases} C_i \longrightarrow R \\ x \longmapsto O \end{cases}$$

On pose également :

$$f_{k+1} : \begin{cases} \overset{\circ}{B}_n \longrightarrow R \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \end{cases}$$

On a alors

$$B_{n+1} = \Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k) \cup \Gamma(f_{k+1}) \cup \Gamma(-f_{k+1}) \cup (-f_{k+1}, f_{k+1}).$$

En effet :

- $\Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k)$ représente le bord du plan équatorial (qui se projette sur S_{n-1}),
- $\Gamma(f_{k+1})$ (resp. $\Gamma(-f_{k+1})$) représente la coupole supérieure (resp. inférieure)
- $(-f_{k+1}, f_{k+1}) = \overset{\circ}{B}_{n+1}$.

D'où le résultat. \square

PROPOSITION IV.1.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(B_n) = 1$

Démonstration Toujours par récurrence sur n .

$$E(B_1) = (-1)^0 + (-1)^0 + (-1)^1 = 1.$$

Si le résultat est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E(B_{n+1}) = E(\Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k)) + E(\Gamma(f_{k+1})) + E(\Gamma(-f_{k+1})) + E((-f_{k+1}, f_{k+1})).$$

Or, $\Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k) = B_n \setminus \overset{\circ}{B}_n$, $E(\Gamma(f_{k+1})) + E(\Gamma(-f_{k+1})) = E(\overset{\circ}{B}_n)$ (il s'agit de graphes sur cet ensemble, ils conservent donc la dimension) et $E((-f_{k+1}, f_{k+1})) = -E(\overset{\circ}{B}_n)$ (il s'agit d'une bande sur cet ensemble, c'est

donc de dimension $+1$). Finalement, il reste :

$$E(B_{n+1}) = E(B_n) - E(\overset{\circ}{B}_n) + 2E(\overset{\circ}{B}_n) - E(\overset{\circ}{B}_n) = E(B_n) = 1.$$

D'où le résultat. □

(iii) **Triangulation et invariant complet d'équivalence définissable**

Nous avons vu que deux ensembles définissables en bijection définissable ont même dimension et même caractéristique d'Euler, mais que ces notions séparément ne permettent pas de caractériser une bijection définissable entre deux ensembles définissables.

Le but de cette section est d'introduire la notion de triangulation qui, à l'instar de la décomposition cellulaire, permet d'étudier plus simplement des ensembles définissables afin d'en tirer des résultats remarquables. [3] Une fois cela fait, nous aurons les outils pour prouver que nos deux invariants sont une condition nécessaire et suffisante d'équivalence définissable entre deux ensembles définissables.

DÉFINITION IV.1.6

Soit F un espace ordonné. Un espace vectoriel ordonné sur F est un espace vectoriel R sur F muni d'un ordre linéaire faisant de R un groupe additif ordonné, tel que

$$\forall \lambda \in F, \forall x \in R : (\lambda > 0, x > 0) \implies \lambda x > 0.$$

▷ **EXEMPLE.**

R muni de son ordre usuel peut être vu comme un espace vectoriel ordonné sur R .

DÉFINITION IV.1.7

Soit R un espace vectoriel ordonné sur F . On suppose $R \neq \{0\}$.

Une *fonction affine* sur R^n est une fonction $f : R^n \rightarrow R$ telle qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ et $a \in R$ de sorte que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + a.$$

Un *ensemble semilinéaire basique* de R^n est un ensemble de la forme :

$$\{x \in R^n : f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_q(x) > 0\}$$

où les f_i, g_j sont des fonctions affines de R^n .

Un *ensemble semilinéaire* de R^n est une union finie d'ensembles semilinéaires basiques de R^n .

◇ **REMARQUE.**

Les ensembles semilinéaires basiques dans R^n sont des ensembles définis par des égalités et des inégalités de polynômes de degré au plus 1.

L'intersection de deux ensembles semilinéaires basiques est un ensemble semilinéaire basique.

▷ **EXEMPLE.**

Les ensembles semilinéaires basiques de R sont exactement les intervalles, les points et l'ensemble vide.

PROPOSITION IV.1.8 *Décomposition semilinéaire basique*

Soit f_1, \dots, f_M fonctions affines de R^{n+1} .

On peut alors partitionner R^n en ensembles semilinéaires basiques C_1, \dots, C_k tels que pour chaque C_i , il existe des fonctions $\xi_{C_i,1} < \dots < \xi_{C_i,j(C_i)} : C_i \rightarrow R$ telles que :

(i) chaque $\xi_{C_i,j}$ est la restriction d'une fonction affine sur R^n ;

(ii) chaque fonction f_k est de signe constant sur chaque graphe des $\xi_{C_i,j}$ et sur chaque bande $(\xi_{C_i,j(C_i)}, \xi_{C_i,j(C_i)+1})$ avec $\xi_{C_i,0} := -\infty$ et $\xi_{C_i,j(C_i)+1} := +\infty$.

DÉFINITION IV.1.9 *Fonction semilinéaire*

$f : A \rightarrow R^n$ est dite *semilinéaire* si son graphe est semilinéaire.

DÉFINITION IV.1.10 *Espace affine engendré*

Un *sous-espace affine* de R^n de dimension d est le translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension d .

Soient $a_0, \dots, a_k \in R^n$. On définit le sous-espace *affine engendré* par a_0, \dots, a_k par :

$$a_0 + R(a_1 - a_0) + \dots + R(a_k - a_0) = \left\{ \sum t_i a_i : t_i \in R, \sum t_i = 1 \right\}.$$

Il s'agit du plus petit espace affine contenant a_0, \dots, a_k .

DÉFINITION IV.1.11

Un uplet a_0, \dots, a_k de R^n est dit *affinement indépendants* si l'espace affine engendré par a_0, \dots, a_k est de dimension k .

▷ EXEMPLE.

$k = 0$: évident, $k = 1$: cela signifie $a_0 \neq a_1$, $k = 2$: a_0, a_1, a_2 sont distincts et non-alignés.

◇ REMARQUE.

La notion d'indépendance affine de a_0, \dots, a_k est équivalente au fait que les vecteurs $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ sont linéairement indépendants.

PROPOSITION IV.1.12

Soit a_1, \dots, a_k affinement indépendants. L'application $(t_0, \dots, t_k) \mapsto \sum t_i a_i$ est un homomorphisme entre les n -uplets de R^{n+1} de somme égale à 1 et l'espace affine engendré par les a_i .

Démonstration

Commençons par montrer qu'il s'agit bien d'un bijection.

Pour la surjectivité, c'est évident par définition.

Pour l'injectivité, il suffit de constater que si $\sum t_i a_i = \sum t'_i a_i$, alors :

$$0 = \sum (t_i - t'_i) a_i = \sum (t_i - t'_i) (a_i - a_0) + \sum t_i a_0 - \sum t'_i a_0 = \sum (t_i - t'_i) (a_i - a_0)$$

d'où $t_i = t'_i$ pour chaque i , par indépendance linéaire des vecteurs $a_i - a_0$.

Reste à montrer la continuité de l'application et de sa réciproque. Pour l'application, c'est clair. Pour la bijection réciproque, il suffit de travailler sur l'équivalent linéaire de notre espace affine : chaque t_i correspond à la projection de l'élément sur l'espace vectoriel engendré par $a_i - a_0$, parallèlement aux autres vecteurs. \square

DÉFINITION IV.1.13 *Coordonnées affines*

Ainsi, pour chaque a dans l'espace engendré par les a_i , il existe un unique $n + 1$ -uplet de R tel que $\sum t_i a_i = a$. Ces t_i sont appelés *coordonnées affines* de a par rapport aux a_i .

DÉFINITION IV.1.14

Un ensemble $S \subset R^n$ est dit *convexe* si pour tous points $a, b \in S$ distincts, le segment $[a, b] := \{ta + (1 - t)b : 0 \leq t \leq 1\}$ est inclus dans S .

L'*enveloppe convexe* d'un ensemble S est le plus petit ensemble convexe contenant S .

◇ REMARQUE.

On peut facilement montrer qu'il s'agit de l'union de tous les $\sum t_i a_i$ pour $a_i \in R$, $\sum t_i = 1$ et $t_i \geq 0$.

DÉFINITION IV.1.15 *Point extrémal*

Un point p d'un convexe $C \subset R^n$ est appelé *point extrémal* de C si pour tous $p_1, p_2 \in C$ tels que $p = \frac{p_1 + p_2}{2} \implies p = p_1 = p_2$.

DÉFINITION IV.1.16 *Simplexe*

On dit qu'un uplet affinement indépendant $a_0, \dots, a_k \in R^n$ engendre le *simplexe*

$$(a_0, \dots, a_k) := \left\{ \sum t_i a_i : \forall i t_i > 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

On dit que (a_0, \dots, a_k) est un k -simplexe de R^n .

◇ REMARQUE.

On constate que (a_1, \dots, a_k) est ouvert dans l'espace affine engendré par les a_i .

DÉFINITION IV.1.17

L'adhérence des (a_0, \dots, a_k) dans R^n , notée $[a_0, \dots, a_k]$, est l'enveloppe convexe des a_i .

Les a_i sont appelés les *sommets* de (a_0, \dots, a_k) et de $[a_0, \dots, a_k]$.

◇ REMARQUE.

On remarque facilement, en utilisant l'unicité des coordonnées affines, que les a_i sont exactement les points extrémaux de $[a_0, \dots, a_k]$.

DÉFINITION IV.1.18 *Face d'un simplexe*

Une *face* de (a_0, \dots, a_k) est un simplexe engendré par un sous-ensemble non-vide de $\{a_0, \dots, a_k\}$.

◇ REMARQUE.

Toujours via l'unicité des coordonnées affines, on constate que deux sous-ensembles disjoints de $\{a_0, \dots, a_k\}$ engendrent des faces disjointes.

On remarque également que $[a_0, \dots, a_k]$ est l'union disjointe de toutes les faces de (a_0, \dots, a_k) .

DÉFINITION IV.1.19

Soit σ, τ deux simplexes. On dit que σ est une face *propre* de τ si σ est une face de τ et $\sigma \subset \tau$. On note alors $\sigma < \tau$.

DÉFINITION IV.1.20 *Complexe*

Un *complexe* de R^n est un ensemble fini K de simplexes de R^n tel que, pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, on a l'une des alternatives suivantes :

- Soit $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \emptyset$
- Soit $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \overline{\tau}$ avec τ une face commune à σ_1 et σ_2 .

◇ REMARQUE.

Ces définitions ne sont pas exactement celles que l'on croise le plus souvent dans la nature. Généralement, le simplexe est l'enveloppe convexe (là où, pour nous, il s'agit de son intérieur). Généralement, on demande que la face commune τ soit dans K .

On constate que deux simplexes distincts dans K sont disjoints.

DÉFINITION IV.1.21

On note :

$|K|$ l'union des simplexes de K (c'est un ensemble semilinéaire borné de R^n), appelé *polyèdre engendré par le complexe K* ;

$Som(K)$ l'ensemble des sommets des simplexes dans K (c'est un ensemble fini de R^n).

DÉFINITION IV.1.22 *Triangulation*

Soit $A \subset R^n$ définissable.

Une *triangulation* de A dans R^n est un couple (Φ, K) avec K complexe de R^n et $\Phi : A \rightarrow |K|$ homéomorphisme définissable.

On a alors $\Phi^{-1}(K) := \{\Phi^{-1}(\sigma) : \sigma \in K\}$ partition finie de A . On appelle le couple $(A, \Phi^{-1}(K))$ *ensemble triangulé*.

THÉORÈME IV.1.23 *Triangulation*

Soit $S \subset R^n$ ensemble définissable, S_1, \dots, S_k sous-ensembles définissables de S .

Alors il existe une triangulation de R^n adaptée aux S_i .

Démonstration

Admis (pp. 130 – 131 [3]).

□

◇ REMARQUE. Ce résultat est donc très similaire au théorème de décomposition cellulaire.

On touche au but de toute cette partie sur l'o-minimalité : caractériser les ensembles à bijection définissables près. Pour ce faire, nous allons avoir besoin de trois lemmes successifs.

LEMME IV.1.24

Soit $k > 0$. Un k -simplexe est l'union disjointe de deux k -simplexes et d'un $k - 1$ -simplexe.

Démonstration Par récurrence sur k .

$k = 1$: $]a, b[=]a, c[\cup]c, b[\cup \{c\}$ où $c = \frac{a+b}{2}$ (par exemple).

$k \in \mathbb{N}$: Soit (a_0, \dots, a_{k+1}) un $k + 1$ -simplexe. Alors (a_0, \dots, a_k) est un k -simplexe. Par hypothèse de récurrence :

$$(a_0, \dots, a_k) = (b_0, \dots, b_k) \cup (c_0, \dots, c_k) \cup (d_0, \dots, d_{k-1}).$$

Mais alors, on a

$$(a_0, \dots, a_{k+1}) = (b_0, \dots, b_k, a_{k+1}) \cup (c_0, \dots, c_k, a_{k+1}) \cup (d_0, \dots, d_{k-1}, a_{k+1}).$$

On récupère bien deux $k + 1$ -simplexes et un k -simplexe, puisqu'on accède à une nouvelle dimension.

□

LEMME IV.1.25

Deux k -simplexes sont semi-linéairement homéomorphes.

Démonstration

L'homéomorphisme a été explicité dans la Proposition IV.1.12. L'application est clairement semi-linéaire, et on sait que la réciproque d'une application semi-linéaire bijective est également semi-linéaire, d'où le résultat. □

LEMME IV.1.26

Soit Δ_m le m -simplexe de R^m engendré par $0, e_1, \dots, e_n$ (où les e_i sont les vecteurs de la base canonique).
Alors

$$\Delta_{m+1} = \{(x, r) \in R^{m+1} : x \in \Delta_m, 0 < r < 1 - \sum_{i=1}^m x_i\}$$

Démonstration

Par double inclusion :

- Si $y = (x_1, \dots, x_m, r) \in \Delta_{m+1}$, il existe des $t_i > 0$ tels que

$$y = t_0 0_R + t_1 e_1 + \dots + t_{m+1} e_{m+1} \text{ et } t_0 + \dots + t_{m+1} = 1$$

On a donc $y = (t_1, \dots, t_{m+1})$. D'autre part :

$$(x_1, \dots, x_m) = (t_0 + t_{m+1}) 0_R + t_1 e_1 + \dots + t_m e_m \text{ et } (t_0 + t_{m+1}) + t_1 + \dots + t_m = 1$$

On a donc $x := (x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m$. De plus, on a $r = t_{m+1}$ avec

$$0 < t_{m+1} = 1 - t_0 - t_1 - \dots - t_m < 1 - t_1 - \dots - t_m$$

d'où le résultat.

- Si $y = (x, r)$ avec $x \in \Delta_m$ et $0 < r < 1 - \sum_{i=1}^m x_i$, il existe des $t_i > 0$ tels que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i e_i, t_0 + \dots + t_m = 1 \text{ et } 0 < r < 1 - \sum_{i=1}^m t_i = t_0$$

. Mais alors :

$$y = (t_0 - r) 0_R + t_1 e_1 + \dots + t_m e_m + r e_{m+1}$$

en posant $t'_0 = t_0 - r$, $t'_{m+1} = r$ et $t'_i = t_i$ pour les autres i , on obtient finalement $y \in \Delta_{m+1}$. \(\square\)

COROLLAIRE IV.1.27

Pour tout k -simplexe σ , on a

$$E(\sigma) = (-1)^k$$

Démonstration

On constate que Δ_k est une cellule ouverte de R^k (évident par induction). On a donc $E(\Delta_k) = (-1)^k$. Soit σ k -simplexe. D'après le lemme précédent, σ est semi-linéairement homéomorphe à Δ_k : en particulier, il s'agit d'un homéomorphisme définissable. On sait alors que $E(\sigma) = E(\Delta_k) = (-1)^k$. \(\square\)

THÉORÈME IV.1.28 *Caractérisation des bijections définissables*

Soit A, B définissables. On a

$$A \text{ et } B \text{ en bijection définissable} \iff \dim(A) = \dim(B) \text{ et } E(A) = E(B).$$

Démonstration

Le sens direct a déjà été prouvé, on se concentre donc sur le réciproque.

On montre même que A et B sont en bijection semi-linéaire. On procède par induction sur $k = \dim(A) = \dim(B)$.

$k = 0$: ok (ensembles finis de même cardinalité)

$k > 0$: On commence par trianguler A et B en des ensembles finis disjoints de simplexes (on note toujours A et B les ensembles triangulés) :

$$A = \bigsqcup_{i=1}^q \sigma_i \text{ et } B = \bigsqcup_{j=1}^s \tau_j.$$

On note ensuite $p \in [1, q]$ et $r \in [1, s]$ tels que :

- pour $i \leq p$ et $j \leq r$, σ_i et τ_j sont de dimension maximale k .

- pour $i > p$ et $j > r$, σ_i et τ_j sont de dimensions strictement inférieures à k .

Via le premier lemme préliminaire, quitte à scinder des simplexes, on peut supposer $p = r$. On peut également supposer qu'il existe un simplexe de dimension $k - 1$ parmi les simplexes de dimension strictement inférieure à k .

D'après le deuxième lemme préliminaire, il existe une bijection semi-linéaire entre $\sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_p$ et $\tau_1 \sqcup \dots \sqcup \tau_p$. Par ailleurs, $A' := \sigma_{p+1} \sqcup \dots \sqcup \sigma(q)$ et $B' := \tau_{p+1} \sqcup \dots \sqcup \tau_s$ sont de dimension $k - 1$ et sont de même caractéristique d'Euler d'après le corollaire du troisième lemme préliminaire. Ainsi, par hypothèse de récurrence, A' et B' sont en bijection semi-linéaire. En regroupant les deux partitions, on a finalement une bijection semi-linéaire entre A et B .

Ne reste alors plus qu'à appliquer les réciproques des homéomorphismes de triangulation pour trouver le résultat. \(\square\)

2 Définissabilité de l'exponentielle

Cette section porte sur un résultat prouvé par Chris Miller [?] et s'appuie sur des résultats sur les corps de Hardy prouvés par Maxwell Rosenlicht [?] que nous commençons par introduire.

DÉFINITION IV.2.29 *Germe à l'infini*

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f et g définissent le même *germe à l'infini* s'il existe un voisinage de l'infini sur lequel les deux fonctions coïncident..

DÉFINITION IV.2.30 *Corps de Hardy*

Un *corps de Hardy* est un ensemble de germes à l'infini stable par dérivation qui forme un corps.

DÉFINITION IV.2.31 *Valuation*

Soit k un corps de Hardy. Il existe une application $\nu : k^* \rightarrow \mathbb{R}$, appelée valuation qui vérifie :

i) si $a, b \in k^*$, alors $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$;

ii) si $a \in k^*$, alors $\nu(a) \geq 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) \in \mathbb{R}$;

iii) par convention, on définit $\nu(0) = +\infty$. Si $a, b \in k$, alors $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$ avec égalité si $\nu(a) \neq \nu(b)$.

iv) si $a, b \in k^*$ et $\nu(a), \nu(b) \neq 0$, alors $\nu(a) \geq \nu(b)$ si et seulement si $\nu(a') \geq \nu(b')$.

v) si $a, b \in k^*$ et $\nu(a) > \nu(b) \neq 0$, alors $\nu(a') > \nu(b')$.

A partir de maintenant, k désignera un corps de Hardy.

PROPRIÉTÉ IV.2.32

1) $\nu(a) > 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$.

2) $\nu(a) = \nu(-a)$

Démonstration

1) Si $\nu(a) > 0$, alors d'après ii), $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) \in \mathbb{R}$. Supposons cette limite non-nulle. On peut ainsi considérer le germe correspondant à la fonction $1/a$ (bien définie en l'infini). Mais alors, d'après i) : $\nu(1) = \nu(a) + \nu(1/a)$. Or $\nu(a) = \nu(a) + \nu(1)$, donc $\nu(1) = 0$ et $\nu(a) = -\nu(1/a)$. Ainsi, $\nu(1/a) < 0$, donc par contraposée de ii), la limite de $1/a$ est infinie : absurde. Nécessairement, a est de limite nulle.

Réciproquement, si a est de limite nulle, alors $1/a$ est de limite infinie. Donc $\nu(1/a) < 0$, d'où le résultat avec le même raisonnement que précédemment.

2) $\nu(a) = \nu(-1 \cdot -a) = \nu(-1) + \nu(-a) = \nu(-a)$. \(\square\)

COROLLAIRE IV.2.33 *Lien avec l'équivalence*

Soient $a, b \in k^*$. Alors $a \sim b$ si et seulement si $\nu(a - b) > \nu(a)$.

PROPRIÉTÉ IV.2.34

Si $a, b \in k^*$ avec $\nu(a) \geq 0$ et $\nu(b) \neq 0$, alors $\nu(a') > \nu(b'/b)$.

Démonstration

Quitte à remplacer a par $a + 1$, on peut supposer que $\nu(a) > 0$. Ainsi, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

On peut alors appliquer la règle de l'Hopital :

$$a = \frac{ab}{b} \sim \frac{a'b + ab'}{b'} = a + a' \frac{b}{b'}.$$

On déduit de iii)

$$\nu\left(a' \frac{b}{b'}\right) = \nu(a + a'b/b' - a) > \nu(-a) = \nu(a) > 0.$$

Finalement, il reste $\nu(a') > \nu(b'/b)$. \(\square\)

PROPRIÉTÉ IV.2.35

Soit $\Psi := \{\nu(u'/u) : u \in k^*, \nu(u) \neq 0\}$.

Si Ψ admet une borne supérieure, alors elle n'est pas de la forme $\nu(g')$ avec $g \in k^*$ et $\nu(g) \neq 0$.

Démonstration

On suppose que la borne supérieure existe. Par l'absurde, si cette borne supérieure est de la forme $\nu(g')$ avec $g \in k^*$ et $\nu(g) \geq 0$, on a en particulier

$$\nu(g') \geq \nu(g'/g)$$

et donc

$$\nu(g) = \nu(g' \cdot g/g') \geq 0$$

d'où $\nu(g) > 0$ (puisque $\nu(g) \neq 0$ par hypothèse).

Montrons que g est de valuation strictement positive minimale dans $\nu(k^*)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $g_1 \in k^*$ tel que $\nu(g) > \nu(g_1) > 0$. D'après v de IV.2.31, on a $\nu(g') > \nu(g_1)$. Par minimalité de la borne supérieure, on sait donc que g_1 n'est pas un majorant de Ψ : c'est absurde d'après la proposition IV.2.34.

Soit $u \in k^*$ tel que $\nu(u) \neq 0$. Par hypothèse, on a $\nu(g') > \nu(u'/u)$, et par minimalité de $\nu(g')$, on a

$$\nu(g'/g) = \nu(g') - \nu(g) > \nu(u'/u) - \nu(g) \geq \nu(u'/u).$$

Ainsi, $\nu(g'/g)$ est un majorant de Ψ , et donc $\nu(g'/g) \geq \nu(g')$: cela contredit le premier paragraphe de cette preuve, d'où l'absurdité et le résultat. \square

◇ REMARQUE.

Si $\mathbb{R} \subset k$, on peut généraliser ce résultat pour tout $g \in k^*$. En effet, si $\nu(g) \neq 0$, c'est le résultat de la proposition précédente, et si $\nu(g) = 0$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(g - c) > 0$, et donc $\nu(g') = \nu((g - c)') \neq \sup(\Psi)$.

DÉFINITION IV.2.36

On dit que $a \in k^*$ est *infiniment croissant* si $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = +\infty$.

PROPOSITION IV.2.37

Soient $a, b \in k^*$ tels que $|\nu(a)| \geq |\nu(b)| > 0$ (en particulier, si a et b sont infiniment croissants avec $a \geq b$), alors

$$\nu(b'/b) \geq \nu(a'/a).$$

Démonstration

Quitte à remplacer a (resp. b) par $\pm a^{\pm 1}$ (resp. $\pm b^{\pm 1}$), on peut supposer les deux germes infiniment croissants. On a alors $|\nu(a)| = \nu(1/a)$ (de même pour b). Notre hypothèse s'écrit donc $\nu(b) \geq \nu(a)$ ou encore $b < M \cdot a$ à l'infini pour un $M > 0$. On a ainsi

$$\log(b) < \log(a) + \log(M).$$

Puisque a et b sont infiniment croissants, on a

$$0 < \frac{\log(b)}{\log(a)} < 1 + \frac{\log(M)}{\log(a)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, il suit

$$\nu(\log(b)) \geq \nu(\log(a))$$

et donc, via *iv*) de IV.2.31

$$\nu(b'/b) \geq \nu(a'/a).$$

\square

LEMME IV.2.38

Soit $f \in k^*$ tel que $\nu(f) \neq \sup \Psi$ (où $\Psi := \{\nu(u'/u) : u \in k^*, \nu(u) \neq 0\}$).

Il existe $u_0 \in k^*$ tel que $\nu(u_0) \neq 0$ et pour tout $u \in k^*$ tel que $|\nu(u_0)| \geq |\nu(u)| > 0$ on a $|\nu(u)| \leq |\nu(fu/u')|$.

Démonstration

On distingue plusieurs cas. On exclut le cas où $\nu(k^*) = \{0\}$ (auquel cas $\Psi = \emptyset$).

On commence par supposer que $\nu(f)$ n'est pas un majorant de Ψ . Dans ce cas, il existe $u_1 \in k^*$ tel que $\nu(u_1) \neq 0$ et $\nu(f) < \nu(u_1'/u_1)$. On choisit ensuite $u_0 \in k^*$ tel quel

$$|\nu(u_0)| = \min\{|\nu(u_1)|, |\nu(fu_1/u_1')|\}.$$

Soit $u \in k^*$ tel que $|\nu(u_0)| \geq |\nu(u)| > 0$. Ainsi, d'après la proposition IV.2.37 :

$$\nu(u'/u) \geq \nu(u_0'/u_0) \geq \nu(u_1'/u_1) > \nu(f).$$

Il suit alors

$$|\nu(fu/u')| = \nu(u'/fu) \geq \nu(u_1'/fu_1) = |\nu(fu_1/u_1')| \geq |\nu(u_0)| \geq |\nu(u)|.$$

On suppose maintenant que $\nu(f)$ majore Ψ . Ainsi, par hypothèse, il existe $f_1 \in k^*$ tel que $\nu(f) > \nu(f_1)$ avec $\nu(f_1)$ majorant de Ψ . On constate alors que, pour tout $u \in k^*$ tel que $\nu(u) \neq 0$:

$$\nu(fu/u') = \nu(f/f_1) + \nu(f_1u/u') \geq \nu(f/f_1) > 0.$$

Ainsi, en posant $u_0 = f/f_1$, on obtient le résultat. \square

THÉORÈME IV.2.39

Soit $f \in k^*$ tel que $\nu(f) \neq \sup \Psi$.

Il existe $u_0 \in k^*$ tel que $\nu(u_0) \neq 0$ et pour tout $u \in k^*$ tel que $|\nu(u_0)| \geq |\nu(u)| > 0$ on a

$$\left(f \cdot \frac{fu/u'}{(fu/u')'} \right) \sim f.$$

Démonstration

On considère le u_0 issu du lemme et on suppose que $u' \neq 0$ (sinon, $u \in \mathbb{R}^*$ et $\nu(u) = 0$), de sorte que fu/u' soit bien défini.

Si $(fu/u')' = 0$, alors $fu/u' \in \mathbb{R}^*$ et donc $\nu(fu/u') = 0$ ce qui contredit le lemme. Ainsi

$$\left(f \cdot \frac{fu/u'}{(fu/u')'} \right)' = \left(\frac{f}{(fu/u')'} \cdot fu/u' \right)' = f + (fu/u') \left(\frac{f}{(fu/u')'} \right)'$$

Soit $u \in k^*$ tel que $|\nu(u_0)| \geq |\nu(u)| > 0$. D'après le corollaire IV.2.33, le résultat que l'on souhaite montrer est équivalent à l'inégalité

$$\nu \left(\left(\frac{f}{(fu/u')'} \right)' \right) > \nu(u'/u).$$

Or, d'après le lemme, on sait que $|\nu(fu/u')| \geq |\nu(u)| > 0$, donc d'après la proposition IV.2.37 :

$$\nu(u'/u) \geq \nu \left(\frac{(fu/u')'}{fu/u'} \right)$$

d'où

$$\nu \left(\frac{f}{(fu/u')'} \right) \geq 0$$

et donc finalement, d'après la propriété IV.2.34

$$\nu \left(\left(\frac{f}{(fu/u')'} \right)' \right) > \nu(u'/u).$$

□

DÉFINITION IV.2.40 *Comparable*

Deux germes f et g sont dits *comparables* s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels quel

$$n|\nu(f)| > |\nu(g)| \text{ et } m|\nu(g)| > |\nu(f)|.$$

◇ REMARQUE. Pour $f \in k^*$, on constate que $f, -f, f^{-1}$ sont dans la même classe de comparabilité. De fait, on pourra toujours choisir f infiniment croissante.

Pour deux germes infiniment croissants $f, g \in k$, on sait que $f \leq g$ ou $g \leq f$ à l'infini. Ainsi, f et g sont comparables si et seulement il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \leq f^n$ (resp. $f \leq g^n$) à l'infini si $f \geq g$ (resp. si $g \geq f$).

PROPOSITION IV.2.41

Soient $a, b \in k^*$ tels que $\nu(a), \nu(b) \neq 0$ et $\nu(a'/a) = \nu(b'/b)$.

Alors a et b sont comparables.

Démonstration

On suppose que a et b sont infiniment croissants, avec $a \geq b$. Ainsi, $\log(a)$ et $\log(b)$ sont également infiniment croissants avec $\log(a) \geq \log(b)$. De plus $\frac{\log(a)'}{\log(b)'} = \frac{a'/a}{b'/b} \in \mathbb{R}^*$ (car $\nu \left(\frac{a'/a}{b'/b} \right) = 0$).

Ainsi, d'après la règle de l'Hopital et en notant c cette valeur réelle, on obtient

$$\frac{\log(a)}{\log(b)} \rightarrow c \in \mathbb{R}^*$$

à l'infini. En outre, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour x suffisamment grand

$$\log(a(x)) \leq n \log(b(x))$$

ou encore

$$a(x) \leq b(x)^n.$$

□

LEMME IV.2.42

Soient $f, g \in k \setminus \mathbb{R}$ tels que $\min(\nu(f), \nu(g)) \neq 0$ et $f'0 \sim g'$.

Alors $f \sim g$.

Démonstration

On suppose que $\nu(f) \leq \nu(g)$. Pour prouver l'équivalence, on se sert du corollaire IV.2.33 et montrer que $\nu(f - g) > \nu(f)$.

Si ce n'est pas le cas, on a $\nu(f - g) \leq \nu(f)$ et donc $\nu((f - g)') \leq \nu(f')$, ce qui est absurde puisque $f' \sim g'$, sauf si $\nu(f - g) = 0$.

Or $\nu(g) \geq \nu(f) \neq 0$, donc $\nu(f), \nu(g) < 0$, ce qui contredit $\nu(f - g) = 0 \leq \nu(f)$ □

PROPOSITION IV.2.43

Soit $f \in k$ infiniment croissant et supposons que k admette des classes de comparaisons plus petites que celles de f .

Alors il existe $g \in k$ tel que $g \sim \log(f)$.

Démonstration

Soit $h \in k$ infiniment croissant, de classe de comparaison plus petite que celle de f . Via les propositions IV.2.37 et IV.2.41, on sait que

$$\nu(h'/h) > \nu(f'/f)$$

et donc $\nu(f'/f) \neq \sup \Psi$. Finalement, d'après le théorème IV.2.39, il existe $g \in k$ tel que $g' \sim f'/f$, d'où le résultat. □

DÉFINITION IV.2.44 *Polynomialement borné*

Une structure o-minimale est dite *polynomialement bornée* pour toute fonction définissable de cette structure il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x)| \leq x^n$ pour x suffisamment grand.

THÉORÈME IV.2.45

Dans une structure o-minimale R non polynomialement bornée, la fonction exponentielle est définissable.

◇ REMARQUE. Dans la suite, le logarithme népérien (réciproque de l'exponentielle) est appelé "le" logarithme et est noté \log .

Démonstration

D'après le théorème de monotonie, on sait que les fonctions définissables sont soit constantes, soit strictement monotones au voisinage de l'infini. Ainsi, les germes à l'infini des fonctions définissables de R forment bien un corps de Hardy et les fonctions définissables ont toutes une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Puisque R n'est pas polynomialement bornée, il existe une fonction définissable f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = +\infty.$$

En particulier, il existe une classe de comparabilité plus petite que celle de f . Ainsi, d'après la proposition IV.2.43, il existe une fonction définissable h telle que $h' \sim f'/f$. On considère alors l'inverse de f dans le corps de Hardy et on constate que

$$(h \circ f^{-1})' \sim 1/\text{id}.$$

On pose $g = h \circ f^{-1}$, définissable.

On procède maintenant en plusieurs étapes.

Première affirmation : pour tout $t > 0$, $t \neq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(tx) - g(x)) \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $t > 1$. D'après le théorème des accroissements finis, on sait que pour x suffisamment grand, on a l'existence de $\xi(x)$ tel que

$$(g(tx) - g(x))/(t - 1) = xg'(\xi(x)) \text{ avec } x < \xi(x) < tx.$$

On a alors $1/t < x/\xi(x) < 1$. De plus, on sait que $xg'(x)$ tend vers 1 en l'infini, donc pour x suffisamment grand on a

$$|xg'(\xi(x)) - x/\xi(x)| < x/(2t\xi(x))$$

d'où

$$|(g(tx) - g(x))/(t - 1) - x/\xi(x)| < \frac{1}{2t}.$$

Ainsi, à l'infini :

$$(t - 1)/(2t) < g(tx) - g(x) < (t - 1)(1 + 1/(2t)).$$

Puisque $x \mapsto g(tx) - g(x)$ est définissable, sa limite en l'infini existe et est comprise entre $(t - 1)/(2t)$ et $(t - 1)(1 + 1/(2t))$.

Pour $t \in]0,1[$, il suffit de constater que $|g(xt) - g(x)|$ a la même limite que $|g(x/t) - g(x)|$ (qui est finie non-nulle d'après ce qui précède).

Deuxième affirmation : Le logarithme est définissable.

On considère la fonction $G: \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(xt) - g(x)) \end{array}$. Cette fonction est définissable. De plus,

$G(1) = 0$ et cette fonction est non nulle, donc G est non constante. Par ailleurs, $G(st) = G(s) + G(t)$ ($s, t > 0$) et via le théorème de décomposition cellulaire \mathcal{C}^1 II.2.29, on sait que cette fonction est dérivable au voisinage de l'infini. Nécessairement, cette fonction est proportionnelle au logarithme (en fait, $G(t) = G'(1) \log(t)$). Puisque G est non nul, on déduit que le logarithme est définissable, et donc l'exponentielle également. \square

- ◇ REMARQUE. La première structure o-minimale étendant les réels qui n'est pas polynialement bornée (et dans laquelle l'exponentielle est donc définissable) découverte l'a été par Wilkie : il s'agit de $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot, \exp)$.