Étude des invariants reliés aux centralisateurs d'algèbres de Lie

Jérôme Milot - encadré par Loïc Poulain d'Andecy

I Généralités sur les représentations de groupes et algèbres de Lie . . . 2
1 Liens entre représentations de groupe et d'algèbre de Lie . . . 2
2 Espaces invariants . . . 2
3 Puissance tensorielle d'une représentation . . . 3
4 Algèbres tensorielles et symétriques . . . 3
5 Représentation duale et fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ . . . 4
6 Représentation adjointe . . . 5
II Algèbre universelle enveloppante . . . 5
1 Définition . . . 5
2 Base de l'algèbre enveloppante . . . 5
3 Représentation adjointe sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et son centre . . . 8
III L'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ et le centre $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . . . 9
1 Définition de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . . . 9
2 L'algèbre des polyômes invariants . . . 9
3 Structure de $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathfrak{g}}$ . . . 10
4 Le centre de l'algèbre enveloppante . . . 11
5 De l'algèbre symétrique à l'algèbre enveloppante . . . 13
IV Extension aux uplets de matrices . . . 14
1 Contexte . . . 14
2 Générateurs de $(Pol^d)^G$ . . . 14
3 Réduction du nombre de générateurs . . . 17
4 Analogue pour $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)$ . . . 20
V Exemples concrets . . . 22
1 Relations entre les T_k . . . 22
2 Étude des T_d . . . 23

Remerciements

Ce mémoire a été rédigé dans le cadre de mon stage de M2 (Sorbonne Université), qui s'est déroulé au Laboratoire de Mathématiques de Reims. Je tiens à remercier particulièrement Loïc Poulain d'Andecy de m'avoir proposé ce sujet très enrichissant, ainsi que pour son temps, sa patience et sa rigueur - qui je l'espère déteindra sur moi. Merci également aux doctorantes et doctorants pour leur accueil dans leur bureau (mention spéciale à Perrine, Laurie et Jade), ainsi qu'à tous les membres du laboratoire qui ont toutes et tous été très chaleureux avec moi.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le centraliseur de l'algèbre universelle enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^d)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Via le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on interprète l'algèbre enveloppante comme une déformation non-commutative d'une algèbre de polynômes. Cela nous permet d'étudier les sous-algèbres invariantes de $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ sous le prisme de la théorie des invariants classique, notamment les algèbres de polynômes invariants sous l'action d'un groupe.

Après des rappels sur les réprésentations de groupes et d'algèbres de Lie - justifiant notamment le fait que l'on peut étudier indifféremment l'une ou l'autre, rendant plus souple notre étude - une description de l'algèbre enveloppante est menée. Une fois ses propriétés - exhibition d'une base, structure de $\mathfrak{g}$-module, lien entre éléments $\mathfrak{g}$-invariants et centre - expliquées, on s'intéresse à l'algèbre des polynômes invariants.

Les éléments invariants les plus simples auxquels on peut penser sont les traces de puissances d'une matrice. Il se trouve que ces éléments suffisent pour décrire l'algèbre des polynômes invariants, et que l'on peut même réduire - sans davantage de difficulté - leur nombre. La description de ces générateurs permet alors d'énoncer une liste analogue des générateurs du centre de l'algèbre enveloppante, grâce aux notions de filtration et d'algèbre graduée d'une algèbre de Lie.

Une fois l'étude pour une matrice terminée, on regarde une généralisation du centre dans le cas de plusieurs matrices : le centralisateur. On procède alors de manière similaire en commençant par donner une liste de générateurs dans le cas commutatif, avant d'essayer de réduire le nombre nécessaire de générateurs - ce qui est plus compliqué que dans le cas d'une matrice, puisque l'on a recourt à la théorie des modules. En revanche, le lien entre la théorie des invariants classiques et le centralisateur s'effectue de la même manière, nous permettant de prouver le théorème de description du centralisateur de $\mathfrak{g}^d$.

La dernière section, reposant sur des résultats informatiques obtenus via Sage, s'intéresse aux cas concrets : tous les générateurs exhibés sont-ils nécessaires ? Si non, quelles sont les relations qui les lient ? On regardera notamment ce qu'il se passe dans le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ pour deux matrices.

I Généralités sur les représentations de groupes et algèbres de Lie

On fixe G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée. L'objectif de cette section est de rappeler certains liens entre ces deux objets, notamment en termes de représentations et d'espaces invariants. On étendra ensuite ces représentations sur un espace vectoriel V à des représentations sur les puissances tensorielles de V, de manière à introduire naturellement une structure de représentation des algèbres tensorielles et symétriques, avant de nous attarder sur les représentations duale et adjointes.

▷ Exemple.

- Si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
- si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \quad \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

Pour simplifier, on se placera dans ce mémoire dans le cadre

$$G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}); \mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}).$$

1 Liens entre représentations de groupe et d'algèbre de Lie

(i) De l'algèbre de Lie au groupe de Lie

Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

Soit $M \in G$. On sait, d'après le lien entre groupe et algèbre de Lie (voir [1]), qu'il existe $g \in \mathfrak{g}$ de sorte que $M = \exp(g)$.

Proposition I.1
L'application

$$\tilde{\rho} : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ M \longmapsto e^{\rho(g)} \end{array} \right.$$

définit une représentation de groupe de G.

Démonstration
Se référer à [1]. ⊠

(ii) Du groupe de Lie à l'algèbre de Lie

Soit $(\tilde{\rho}, V)$ une représentation continue de dimension finie de G.
Soit $g \in \mathfrak{g}$. On pose $M_t = e^{tg}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On constate que $g = \frac{\mathrm{d}\, M_t}{\mathrm{d}\, t}_{|t=0}$.

Proposition I.2
L'application

$$\rho : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ g \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}\, \tilde{\rho}(M_t)}{\mathrm{d}\, t}_{|t=0} \end{array} \right.$$

définit une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Démonstration
Se référer à [1]. ⊠

2 Espaces invariants

Nous allons maintenir établir une correspondance entre les vecteurs de V invariants par G et ceux invariants par $\mathfrak{g}$, histoire de pouvoir travailler indifféremment avec une représentation ou l'autre.

Commençons par définir proprement ces espaces invariants.

Définition I.3
On définit l'espace des vecteurs de V invariants par l'action du groupe G par :

$$V^G := \{v \in V : \quad M \cdot v = v\ \forall M \in G\}.$$

On définit l'espace des vecteurs de V invariants par l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : \quad g \cdot v = 0 \ \forall g \in \mathfrak{g}\}.$$

Théorème I.4
On a l'égalité

$$V^G = V^{\mathfrak{g}}.$$

Démonstration

On procède par double inclusions.

Soit $v \in V^{\mathfrak{g}}$. Soit $M \in G$. Alors, il existe $g \in \mathfrak{g}$ tel que $M = \exp(g)$. Or $g \cdot v = 0$, donc finalement $M \cdot v = \exp(g) \cdot v = v$, d'où $v \in V^G$.

Réciproquement, soit $v \in V^G$. Soit $g \in \mathfrak{g}$. On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tg) \in G$ donc $\exp(tg) \cdot v = v$. Mais alors, en dérivant puis spécifiant en 0, on obtient $g \cdot v = 0$. Ainsi, $v \in V^{\mathfrak{g}}$, d'où le résultat. ⊠

3 Puissance tensorielle d'une représentation

Dans le cadre de notre étude, on sera amené à considérer des produits tensoriels d'espaces vectoriels. On cherche donc à étendre les représentations sur ces produits tensoriels.

Définition I.5 *Puissance tensorielle d'une représentation de groupe*
Soit $(\tilde{\rho}, V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on peut définir l'application

$$\tilde{\rho}^{\otimes^p} : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes^p}) \\ M \longmapsto \tilde{\rho}(M) \otimes \cdots \otimes \tilde{\rho}(M) \end{array} \right. .$$

On appelle cette représentation la *p-ème puissance tensorielle* de $\tilde{\rho}$.

Définition I.6 *Puissance tensorielle d'une représentation d'algèbre de Lie*
Soit (ρ, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on peut définir l'application

$$\rho^{\otimes^p} : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes^p}) \\ x \longmapsto \rho(x) \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes \rho(x) \end{array} \right. .$$

On appelle cette représentation la *p-ème puissance tensorielle* de ρ.

◇ Remarque. On peut indifféremment passer d'une représentation de groupe à la représentation d'algèbre de Lie puis passer à la puissance tensorielle, ou passer à la puissance tensorielle puis passer de la représentation de groupe à la représentation d'algèbre de Lie (et inversement).

Autrement dit : $\widetilde{\rho^{\otimes p}} = \tilde{\rho}^{\otimes p}$.

4 Algèbres tensorielles et symétriques

On commence par définir l'algèbre tensorielle associée à un espace vectoriel, pour pouvoir ensuite construire l'algèbre symétrique associée. On calquera ensuite, dans la section suivante, cette construction pour définir la notion d'algèbre enveloppante.

(i) L'algèbre tensorielle

Définition I.7 *Algèbre tensorielle*
On définit *l'algèbre tensorielle* d'un espace vectoriel V par :

$$T(V) := \bigoplus_{p \geqslant 0} V^{\otimes p}.$$

◇ Remarque. L'algèbre tensorielle est bien une algèbre, en la munissant du produit naturel :

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \times w_1 \otimes \cdots \otimes w_r = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_r.$$

Par ailleurs, si V est une représentation de G (resp. $\mathfrak{g}$), alors $T(V)$ est une représentation de G (resp. $\mathfrak{g}$), via les puissances tensorielles de représentations introduites dans la section $I.3$ (on considère la somme de toutes celles-ci).

(ii) L'algèbre symétrique

Certains vecteurs de l'algèbre tensorielle possèdent une propriété particulière : celle d'être invariant par action du groupe de permutations. Ces vecteurs nous permettent de définir l'algèbre symétrique, dont l'étude nous permettra d'obtenir des résultats également valables pour l'algèbre enveloppante.

DÉFINITION I.8 *Symétrisation*
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur :

$$\mathrm{Sym}_p : \left| \begin{array}{rcl} V^{\otimes p} & \longrightarrow & V^{\otimes p} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_p & \longmapsto & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \end{array} \right. .$$

On considère alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $S^p(V) := \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}_p)$.

PROPOSITION I.9
Si (ρ,V) est une représentation de G (resp. $\mathfrak{g}$), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S^p(V)$ est une représentation de G (resp. $\mathfrak{g}$).

Démonstration
Il suffit de constater que Sym_p commute avec $\tilde{\rho}^{\otimes p}(M)$ pour tout $M \in G$ (resp. avec $\rho^{\otimes p}(g)$ pour tout $g \in \mathfrak{g}$) (en fait, Sym_p commute avec tout produit tensoriels d'endomorphismes). ⊠

DÉFINITION I.10 *Algèbre symétrique*
On définit l'*algèbre symétrique* d'un espace vectoriel V par :

$$S(V) := \bigoplus_{p \geqslant 0} S^p(V).$$

◇ REMARQUE. Comme pour $T(V)$, on peut sommer les représentations associées aux S^p pour obtenir une structure de représentation de groupe pour $S(V)$.

◇ REMARQUE. On dipose de deux autres manières de décrire l'algèbre symétrique.

1. En tant qu'espace vectoriel, on constate que $S(V) = T(V)/\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_p - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \forall p \in \mathbb{N}\}$.
2. En tant qu'algèbre, on constate que $S(V) = T(V)/I$ où I est l'idéal bilatère engendré par les $v \otimes w - w \otimes v$ avec $v,w \in V$.

On constate par ailleurs que $S(V)$ est une algèbre (avec la multiplication induite par $T(V)$) commutative.

5 Représentation duale et fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$

On souhaite maintenant expliciter un lien entre l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie (que l'on va considérer comme une représentation d'elle-même via la représentation adjointe) et les algèbres de polynômes. Pour ce faire, on passe par l'espace dual.

DÉFINITION I.11 *Représentation duale*
Soit (ρ,V) une représentation de $\mathfrak{g}$, $(\tilde{\rho},V)$ une représentation de G. On peut définir les *représentations duales associées* :

$$\tilde{\rho}^* : \left| \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathrm{End}(V^*) \\ M & \longmapsto & f \in V^* \mapsto \big(v \mapsto f(M^{-1} \cdot v)\big) \in V^* \end{array} \right. ;$$

$$\rho^* : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V^*) \\ g & \longmapsto & f \in V^* \mapsto (v \mapsto f(-g \cdot v)) \in V^* \end{array} \right. .$$

◇ REMARQUE. Comme dans le cas de la puissance tensorielle d'une représentation, on peut passer indifféremment d'une représentation à l'autre, dans le sens : $\widetilde{\rho^*} = \tilde{\rho}^*$.

Puisque V^* est un espace vectoriel, on peut considérer son algèbre symétrique.

Définition I.12 *Fonctions polynomiales sur V*
L'algèbre $S(V^*)$ est appelée *algèbre des fonctions polynomiales sur V*.

Justifions cette terminologie : si $(e_1, \dots ,e_n)$ est une base de V, on considère la base duale associée $(e_1^*, \dots ,e_n^*)$. Alors, on dispose d'un isomorphisme d'algèbres ;

$$S(V^*) \simeq \mathbb{C}[e_1^*, \dots ,e_n^*].$$

6 Représentation adjointe

Nous allons nous intéresser à des représentations propres aux groupes et algèbres de Lie : les représentations adjointes. Celles-ci nous permettrons de voir le centre de l'algèbre enveloppante comme un espace invariant sous cette action.

Définition I.13 *Représentations adjointes*
On définit la représentation de groupe dite *adjointe* :

$$\mathrm{Ad}\colon \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ M \longmapsto h \mapsto MhM^{-1} \end{array} \right. ;$$

et la représentation d'algèbre de Lie, également dite *adjointe* :

$$\mathrm{ad}\colon \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ g \longmapsto h \mapsto [g,h] \end{array} \right. .$$

◇ Remarque. On constate ici pourquoi on s'est placé dans le cas particulier des algèbres de Lie matricielles : pour que le produit MhM^{-1} ait un sens.

II Algèbre universelle enveloppante

1 Définition

La description en tant qu'algèbre quotient de l'algèbre symétrique nous inspire dans le cas particulier des algèbres de Lie : que se passe-t-il si l'on considère le crochet comme un défaut de commutativité ?

Définition II.1 *Algèbre enveloppante*
On définit l'*algèbre enveloppante* par

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$$

avec $I := < g \otimes h - h \otimes g - [g,h] >$, idéal bilatère de $T(\mathfrak{g})$.

◇ Remarque. Pour une description plus complète (notamment pour le caractère universel de l'algèbre enveloppante), on peut se référer à [1] ou [2].

▷ Exemple. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors l'algèbre enveloppante obtenue correspond à l'algèbre symétrique vue précédemment ! (Puisque le crochet est nul, on retrouve juste la condition de "commutativer" l'algèbre)

Notation II.2
À partir de maintenant, et ce jusqu'à la fin de la section II (afin de bien comprendre les objets que nous manipulons), on notera en minuscule les éléments de $\mathfrak{g}$ et en majuscule les éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. De plus, pour un élément $x_i \in \mathfrak{g}$, on notera X_i l'élément associé dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ via l'application canonique ($X_i = x_i + I \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ avec $x_i \in T^1(\mathfrak{g})$).

2 Base de l'algèbre enveloppante

On cherche maintenant à exhiber une base de l'algèbre enveloppante. Pour ce faire, on fixe $(x_1, \dots ,x_d)$ une base de $\mathfrak{g}$.

Notation II.3
Pour toute suite finie d'entiers $I = (i_1, \dots ,i_p)$, on pose $X_I := X_{i_1} \dots X_{i_p}$.

Pour un entier i, on note $i \leqslant I$ si $i \leqslant j$ pour tout $j \in I$.
Enfin, on note $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{g})$ l'image canonique dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $T^0 + \cdots + T^m$.

Lemme II.4
Soient $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{g}$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Alors on a

$$A_1 \ldots A_p - A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(p)} \in \mathfrak{U}_{p-1}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration

Puisque σ est un produit de transpositions de la forme $(i,i+1)$, il suffit de vérifier que ce fait est vrai pour n'importe quelle permutation de cette forme. Or, pour une permutation $\tau = (i,i+1)$:

$$\begin{aligned} A_1 \ldots A_p - A_{\tau(1)} \ldots A_{\tau(p)} &= A_1 \ldots A_i A_{i+1} \ldots A_p - A_1 \ldots A_{i+1} A_i \ldots A_p \\ &= A_1 \ldots [A_i, A_{i+1}] \ldots A_p \in \mathfrak{U}_{p-1}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ où les τ_j sont des permutations de la forme $(i,i+1)$, on obtient :

$$A_1 \ldots A_p - A_{\tau_k(1)} \ldots A_{\tau_k(p)} + A_{\tau_k(1)} \ldots A_{\tau_k(p)} - \cdots - A_{\tau_1 \ldots \tau_k(1)} \ldots A_{\tau_1 \ldots \tau_k(p)} + A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(p)} \in \mathfrak{U}_{p-1}(\mathfrak{g})$$

d'où le résultat. ⊠

Notation II.5
On note $\mathcal{I}_{\mathrm{o}}$ l'ensemble des suites finies d'entiers I qui sont croissantes (i.e : $i_j \leqslant i_{j+1}$).

Lemme II.6
L'espace vectoriel $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{g})$ est engendré par les $(X_I)_{I \in \mathcal{I}_{\mathrm{o}}}$.

Démonstration

Il est clair que l'espace vectoriel est engendré par $(X_I)_{\mathcal{I}}$. Il suffit donc de montrer que, pour $I \notin \mathcal{I}_{\mathrm{o}}$, X_I est engendré via les $(X_{I'})_{I' \in \mathcal{I}_{\mathrm{o}}}$. On procède par récurrence sur la longueur de I.

– Si I est de longueur 2 : alors, $I = (i,j)$ avec $j < i$. Or, on a :

$$X_i X_j = X_j X_i + [X_i, X_j]$$

avec $X_j X_i$ bien ordonné et $[X_i, X_j] \in \mathfrak{U}_1(\mathfrak{g})$ combinaison linéaires de $X_{I'}$ qui sont bien ordonnés, d'où le résultat.

– Soit k la longueur de I. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ tel que $\sigma \cdot I$ est ordonné. Mais alors, d'après le lemme II.4 :

$$X_I = X_{\sigma \cdot I} + X'$$

avec $X' \in \mathfrak{U}_{k-1}(\mathfrak{g})$. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc X_i combinaison linéaire de $X_{I'}$ qui sont bien ordonnés, d'où le résultat.

⊠

Panorama II.7
La suite de cette preuve est pour le moins technique et pourra être passée dans une première lecture (résultat final : théorème PBW II.10.)

Néanmoins, en voici l'esprit : la famille génératrice que nous venons d'exhiber est intéressante, puisque nous avons réduit le nombre de générateurs nécessaires. Assez pour espérer qu'il s'agisse en réalité d'une base et conclure cette sous-section ?

Et bien oui ! Il suffit donc de prouver sa liberté. Pour ce faire, on passe par la théorie des représentations : on essaye de construire une action de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel (présentement : sur un espace polynomial), et on prouve que l'image de notre famille génératrice par cette action est libre. On récupère automatiquement la liberté de la famille dans $\mathfrak{g}$ en ayant travaillé sur un espace mieux connu.

Notation II.8
On note $P := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ et $P_i := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]_{\leqslant i}$.

Lemme II.9
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une unique application linéaire $f_p : \mathfrak{g} \otimes P_p \to P$ vérifiant :

$$\begin{aligned} &(A_p) && \forall z_I \in P_p, \forall i \leqslant I : && f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I; \\ &(B_p) && \forall q \leqslant p, \forall z_I \in P_q : && f_p(x_i \otimes z_I) - z_i z_I \in P_q; \\ &(C_p) && \forall z_J \in P_{p-1} : && f_p\left(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)\right) = f_p\left(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)\right) + f_p([x_i, x_j] \otimes z_I). \end{aligned}$$

◇ Remarque. La propriété (B_p) assure la bonne définition des objets de (C_p). Cette dernière s'interprète comme une sorte d'identité de Jacobi (dans l'optique de simplifier les notations, cette remarque s'avère très pratique !).

Démonstration

Nous procédons par récurrence pour justifier l'existence et l'unicité.

– $\underline{p=0}$ On procède par analyse-synthèse.

Analyse :

S'il existe une telle fonction f_0, alors la condition (A_0) impose $f_0(x_i \otimes 1) = z_i$ (car $z_I \in P_0$ implique que l'on regarde I vide, donc la condition $i \leqslant I$ est toujours vérifiée). Ceci définit de manière unique notre f_0.

Synthèse :

Soit f_0 définie comme précédemment. Alors f_0 vérifie $(A_0), (B_0)$ et (C_0) (ces deux dernières étant des conditions triviales), d'où le résultat.

– $\underline{p-1 \Rightarrow p}$ On suppose prouvées l'existence et l'unicité de f_{p-1}. On raisonne de nouveau par analyse-synthèse.

Analyse :

Si f_p existe, alors $(f_p)_{|\,\mathfrak{g}\otimes P_{p-1}}$ vérifie $(A_{p-1}), (B_{p-1}), (C_{p-1})$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $(f_p)_{|\,\mathfrak{g}\otimes P_{p-1}} = f_{p-1}$. Finalement, on est ramené à prouver que f_{p-1} admet un prolongement linéaire f_p à $\mathfrak{g} \otimes P_p$ et un seul vérifiant les propriétés (A_p),(B_p),(C_p).

On doit donc définir ce $f_p(x_i \otimes z_I)$. D'après ce qui précède, il suffit donc de le faire sur les $x_i \otimes z_I$ avec I suite croissante de p éléments. Si $i \leqslant I$, alors $f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I$ d'après (A_p). Sinon, $I = (j,J)$ avec $j < i$ et $j \leqslant J$. On a alors :

$$f_p(x_i \otimes z_I) = f_p\left(x_i \otimes f_{p-1}(x_j \otimes z_J)\right)$$

d'après (A_{p-1}), et donc

$$f_p(x_i \otimes z_I) = f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J)) + f_{p-1}([x_i,x_j] \otimes z_J)$$

d'après (C_p) (puisque $f_{p-1} = (f_p)_{|\,\mathfrak{g}\otimes P_{p-1}}$). Or, on sait, par hypothèse de récurrence, que $f_{p-1}(x_i \otimes z_J) = z_i z_J + w$ avec $w \in P_{p-1}$ d'après (B_{p-1}). Ainsi :

$$f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J)) = z_j z_i z_J + f_{p-1}(x_j \otimes w)$$

d'après (A_p) : on a donc une unique expression possible pour un prolongement de f_{p-1} à $\mathfrak{g} \otimes P_p$.

Réciproquement, ce prolongement vérifie (A_p) et (B_p) (via l'expression explicite). Reste à vérifier qu'il vérifie également (C_p). Maintenant que nous sommes assurés de sa bonne définition et que ses restrictions aux $\mathfrak{g} \otimes P_q$ sont les f_q, on adopte la notation

$$x_i z_I := f_p(x_i \otimes z_I).$$

Si $j < i$ et $j \leqslant J$: (C_p) est vérifiée par construction.

Par ailleurs, puisque $[x_i,x_j] = -[x_j,x_i]$, (C_p) est également vérifiée pour $i < j$ et $i \leqslant J$.

Enfin, si $i = j$, (C_p) est trivialement vérifiée. Ainsi, les cas $i \leqslant J$ ou $j \leqslant J$ sont déjà traités. Il ne reste qu'à regarder les cas restants.

On a alors $J = (k,K)$ avec $k \leqslant K, k < i$ et $k < j$. Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$x_j z_J = x_j(x_k z_K) = x_k(x_j z_K) + [x_j, x_k]\, z_K.$$

Or, $x_j z_K$ est de la forme $z_j z_K + w$ avec $w \in P_{p-2}$. Ensuite, on peut appliquer (C_p) à $x_i(x_k(x_j z_K))$ car $k \leqslant K$ et $k < j$, mais aussi à $x_i(x_k w)$ par hypothèse de récurrence. On a alors :

$$\begin{aligned} x_i(x_j z_J) &= x_i(x_k(x_j z_K)) + x_i([x_j,x_k]\, z_K) \\ &= x_k(x_i(x_j z_K)) + [x_i, x_k]\,(x_j z_K) + [x_j,x_k] + [x_i,[x_j,x_k]]\, z_K. \end{aligned}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} x_i(x_j z_J) - x_j(x_i z_J) &= x_k(x_i(x_j z_K) - x_j(x_i z_K)) + [x_i,[x_j,x_k]]\, z_K - [x_j,[x_i,x_k]]\, z_K \\ &= x_k([x_i,x_j]\, z_K) + [x_i,[x_j,x_k]]\, z_K + [x_j,[x_k,x_i]]\, z_K \\ &= [x_i,x_j]\,(x_k z_K) + [x_k,[x_i,x_j]]\, z_K + [x_i,[x_j,x_k]]\, z_K + [x_j,[x_k,x_i]]\, z_K \\ &\overset{\text{Jacobi}}{=} [x_i,x_j]\,(x_k z_K) = [x_i,x_j]\, z_J \end{aligned}$$

d'où le résultat.

⊠

◇ Remarque. On a tout simplement défini une famille d'applications linéaires qui joue le rôle d'une action de $\mathfrak{g}$ sur P. Ainsi, en prouvant la liberté de l'image d'une famille de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{P}$, on en déduit la liberté de la famille dans $\mathfrak{g}$.

Théorème II.10 *Poincarré-Birkhoff-Witt*
La famille $(X_1^{\nu_1} \dots X_d^{\nu_d})_{\nu_1,\dots,\nu_d \in \mathbb{N}}$ forme une base de G.

Démonstration
On sait déjà que cette famille est génératrice d'après le lemme II.6. Reste donc à prouver sa liberté.
D'après ce qui précède, on peut construire une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans P via :

$$\rho(x_i)(z_I) = f_p(x_i,z_I)$$

(en particulier $\rho(x_i)(z_I) = z_i z_I$ pour $i \leqslant I$). Il existe donc un homomorphisme d'algèbres φ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{End}(P)$ telle que $\varphi(X_i)(z_I) = z_i z_I$ pour $i \leqslant I$. Ainsi, pour $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_p$, on a

$$\varphi(X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p})(1) = z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_p}.$$

S'il existe des suites croissantes $I_1,\dots,I_r$ telles que $X_{I_1},\dots,X_{I_r}$ soient liés, alors les $z_{I_1},\dots,z_{I_r}$ le seraient également, ce qui n'est pas le cas. D'où la liberté de la famille et le résultat. ⊠

◇ Remarque. Il existe une autre manière - sur laquelle je ne me suis pas davantage penché - de prouver la liberté de cette base, algorithmique cette-fois via le lemme des diamants.

3 Représentation adjointe sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et son centre

Maintenant qu'on en sait davantage sur la structure de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on souhaite faire le lien entre la représentation adjointe et le centre de l'algèbre enveloppante.

Proposition II.11
L'espace vectoriel $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ et de G induite par la représentation adjointe.

Démonstration
Il suffit de prouver que l'idéal bilatère $I = < x \otimes y - y \otimes x - [x,y] >$ est stable par $\mathfrak{g}$.
Or, pour $g \in \mathfrak{g}$, $x,y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} g \cdot (x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) &= (g \cdot x) \otimes y + x \otimes (g \cdot y) - (g \cdot y) \otimes x - y \otimes (g \cdot x) - g \cdot [x,y] \\ &= ((g \cdot x) \otimes y - y \otimes (g \cdot x) - [g \cdot x, y]) + (x \otimes (g \cdot y) - (g \cdot y) \otimes x - [x, g \cdot y]) \\ &\in I \end{aligned}$$

car $g \cdot [x,y] = [g,[x,y]] = -[y,[g,x]] - [x,[y,g]] = [g \cdot x,y] + [x, g \cdot y]$. ⊠

Décrivons explicitement l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ afin de faire le lien entre ses invariants et le centre de l'algèbre enveloppante.

Proposition II.12
L'action induite sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ par l'action adjointe est définie par :

$$\forall X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \forall g \in \mathfrak{g} : \quad g \cdot X = [G,X].$$

Démonstration
Cela repose sur le fait que $[g,\cdot]$ est une dérivation. En effet, on sait, d'après le théorème PBW II.10 que, pour une base $x_1,\dots,x_n$ de $\mathfrak{g}$, la famille $X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ est une base de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Or, par définition de l'action sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$:

$$g \cdot X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} = [G,X_1] X_1^{m_1-1} \dots X_n^{m_n} + X_1 [G,X_1] X_1^{m_1-2} \dots X_n^{m_n} + \dots + X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n-1} [G,X_n].$$

D'autre part, grâce à la propriété de dérivation, on constate :

$$[G, X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}] = [G,X_1] X_1^{m_1-1} \dots X_n^{m_n} + X_1 [G,X_1] X_1^{m_1-2} \dots X_n^{m_n} + \dots + X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n-1} [G,X_n]$$

d'où le résultat.

⊠

On en déduit donc le résultat suivant qui justifie le lien entre l'étude des espaces invariants et notre objectif de décrire le centre de l'algèbre enveloppante.

Corollaire II.13
On a l'égalité :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathcal{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})).$$

◇ Remarque. À partir de maintenant, on cesse de différencier les éléments de $\mathfrak{g}$ vus dans $\mathfrak{g}$ ou dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Ainsi, les éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ pourront être notés avec des minuscules.

III L'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ et le centre $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

On se place désormais explicitement dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

1 Définition de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

On commence par donner une définition commode de cet espace - qui, on le rappelle, est en réalité $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ - via une base vectorielle et le comportement du crochet sur cette base.

Définition III.1
L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel engendré par des vecteurs $e_{i,j}$ vérifiant les relations :

$$[e_{i,j}, e_{k,l}] = \delta_{j,k} e_{i,l} - \delta_{i,l} e_{k,j}.$$

◇ Remarque. Tout ce qui sera fait dans cette section et la suivante est également valable pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

2 L'algèbre des polyômes invariants

On considère $\mathrm{Pol}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ l'ensemble des applications polynomiales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des applications $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}]$ de sorte que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(M) = P(m_{1,1}, \ldots, m_{n,n})(=: P(M)$ par abus de notation). Dans la suite, on notera f_P pour désigner une fonction polynomiale dont le polynôme associé est P.

On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison, et on l'étend à $\mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ de manière naturelle via :

$$\rho\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) & \longrightarrow & Pol(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \\ (M, f_P) & \longmapsto & \left(A \mapsto P\left(M^{-1}AM\right)\right) \end{array} \right. .$$

Le but de cette section est d'établir les propriétés de l'ensemble des fonctions polynomiales invariantes par cette action, c'est-à-dire les f_P qui vérifient

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \; P(M^{-1}AM) = P(A).$$

On note $\left(\mathrm{Pol}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)\right)^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$. Il est déjà clair que cet ensemble possède une structure d'algèbre, mais nous allons la décrire plus précisément. Commençons cependant par établir ses liens avec l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes définie en section II.

Dans notre cas, on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. On va donc pouvoir faire le lien avec tout ce qui précède. En effet, on constate que

$$S(\mathfrak{g}^*) = \mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})).$$

On considère donc l'espace vectoriel invariant $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ ($\mathfrak{g}$ représentation adjointe de $\mathfrak{g}$). On constate qu'il s'agit d'une sous-algèbre de $S(\mathfrak{g}^*)$.

L'étude menée dans la section I nous permet de constater que l'action induite sur $S(\mathfrak{g}^*)$ coïncide avec l'action que nous venons de définir sur $\mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. En particulier :

$$\mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathfrak{g}} = S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}.$$

Par ailleurs, dans ce cadre, on peut identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ en tant que représentations de G et de $\mathfrak{g}$.

Proposition III.2
L'application

$$\psi\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ e_{i,j} & \longmapsto & e_{j,i}^* \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

Démonstration

Il s'agit de vérifier que ψ respecte les représentations.

Ainsi,

$$\psi\left(\mathrm{ad}_{e_{i,j}}(e_{k,l})\right) = \psi\left([e_{i,j}, e_{k,l}]\right) = \delta_{j,k} e_{l,i}^* - \delta_{i,l} e_{j,k}^*$$

D'autre part, pour $x \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_{e_{i,j}}^*\left(\psi(e_{k,l})\right) = \mathrm{ad}_{e_{i,j}}^*(e_{l,k}^*)(x) = e_{l,k}^*\left(-[e_{i,j}, x]\right).$$

En particulier, en spécifiant en $x = e_{a,b}$ (il suffit que les deux membres coïncident sur la base des $(e_{i,j})$), on constate :

$$\psi\left(\mathrm{ad}_{e_{i,j}}(e_{k,l})\right)(e_{a,b}) = \delta_{j,k}\delta_{l,a}\delta_{i,b} - \delta_{i,l}\delta_{j,a}\delta_{k,b}$$

et

$$\mathrm{ad}^*_{e_{i,j}}\left(\psi(e_{k,l})\right)(e_{a,b}) = e^*_{l,k}\left(-\delta_{j,a}e_{i,b} + \delta_{i,b}e_{a,j}\right) = -\delta_{j,a}\delta_{i,l}\delta_{k,b} + \delta_{i,b}\delta_{l,a}\delta j,k$$

d'où le résultat. ⊠

Ainsi, nous venons d'établir les isomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules :

$$\mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \simeq S(\mathfrak{g}^*) \simeq S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}].$$

Plus explicitement, on a l'isomorphisme d'algèbres :

$$\varphi \colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]_{1\leqslant i,j \leqslant n} & \longrightarrow & \mathrm{Pol}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right) \\ \overline{e}_{i,j} & \longmapsto & M \mapsto m_{j,i} \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]$ est définie par

$$e_{i,j} \cdot \overline{e}_{k,l} = \delta_{j,k}\overline{e}_{i,l} - \delta_{i,l}\overline{e}_{k,j}$$

étendue par dérivation :

$$e_{i,j} \cdot \overline{e}_{k_1,l_1} \dots \overline{e}_{k_p,l_p} = (e_{i,j} \cdot \overline{e}_{k_1,l_1})\overline{e}_{k_2,l_2} \dots \overline{e}_{k_p,l_p} + \dots + \overline{e}_{k_1,l_1} \dots (e_{i,j} \cdot \overline{e}_{k_p,l_p}).$$

Dans la suite, nous noterons donc indifféremment $\mathrm{Pol}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ ou $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]$.

3 Structure de $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathfrak{g}}$

On s'intéresse maintenant à la description de l'algèbre des polynômes invariants $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathfrak{g}}$. On commence par exhiber certains de ses éléments naturels.

Propriété III.3
Les éléments $\overline{T}_k := \sum\limits_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_2,i_1} \dots \overline{e}_{i_1,i_k}$ sont dans $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathfrak{g}}$.

◇ Remarque. Puisque $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]$ est une algèbre commutative, on a $\overline{T}_k = \sum\limits_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_k} \dots \overline{e}_{i_2,i_1}$. En réindexant judicieusement ($i_k \leftrightarrow i_2$, ...), on a donc l'expression :

$$\overline{T}_k := \sum_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_2} \dots \overline{e}_{i_k,i_1}.$$

Démonstration
On constate que ces éléments correspondent, via l'isomorphisme exhibé dans la sous-section précédente, aux applications $\left(M \mapsto \mathrm{Tr}(M^k)\right)$.
Le fait qu'elles soient polynomiales est clair (il s'agit de polynômes en les coefficients, donc en les $\overline{e}_{i,j}$) et le fait qu'elles soient invariantes provient de l'invariance de la trace par conjugaison.
Par identification, on a donc bien $\overline{T}_k \in \mathbb{C}[\overline{e}^{\mathfrak{g}}_{i,j}]$. ⊠

Nous venons donc d'exhiber les premiers éléments qui nous intéressent ... Mais en fait, il s'agit des plus importants, comme l'atteste le résultat suivant.

Théorème III.4
L'algèbre $\mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ est engendrée par les $\overline{T}_k$ pour $k \in \{1,\dots,n\}$.

Démonstration
On va prouver le résultat sur l'ensemble des matrices diagonales, le déduire pour les matrices diagonalisables et conclure par un argument de densité.
Pour ce faire, montrons tout d'abord que, pour $f_P \in \mathbb{C}[e_{i,j}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, il existe $P_0 \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ tel que $(f_P)_{|\mathcal{D}_n} = P_0((\overline{T}_1)_{|\mathcal{D}_n},\dots,(\overline{T}_n)_{|\mathcal{D}_n})$
On commence via les matrices diagonales : soit $D := \mathrm{diag}\,(a_{1,1},\dots a_{n,n})$. On a alors $f_P(D) = P(D) = \sum\limits_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,i_n} a_{1,1}^{i_1} \dots a_{n,n}^{i_n}$. On définit le polynôme $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ tel que $\tilde{P}(a_{1,1},\dots,a_{n,n}) = P(D)$. On souhaite montrer que ce polynôme est symétrique : la théorie des polynômes symétriques nous permettra alors de conclure.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice permutation associée. On constate alors que :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(a_{1,1},\dots,a_{n,n}) = f_P(D) &= f_P\left(P_\sigma D P_\sigma^{-1}\right)\\ &= f_P\left(\mathrm{diag}(a_{\sigma(1),\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n),\sigma(n)})\right)\\ &= \sigma \cdot \tilde{P}(a_{1,1},\dots,a_{n,n}).\end{aligned}$$

Or, ce résultat est valable pour tous $a_{1,1},\dots,a_{n,n}$: puisque $\mathbb{C}$ est infini, on a donc $\tilde{P} = \sigma \cdot \tilde{P}$. Ceci est vrai pour toute permutation τ de $\mathfrak{S}_n$, d'où $\tilde{P}$ symétrique.

En particulier, on sait que $\tilde{P}$ s'exprime comme combinaison algébrique des n premières sommes de Newton de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$. Ainsi, on a donc l'existence d'un polynôme $P_0 \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ tel que $\tilde{P} = P_0(N_1,\dots,N_n)$, et donc $f_P(D) = P_0(\overline{T}_1(D),\dots,\overline{T}_n(D))$.

Enfin, pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on constate que pour $f_P \in \mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, on a $f_P = P_0(\overline{T}_1,\dots,\overline{T}_n)$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables. Or, ces deux applications sont continues : puisqu'elles coïncident sur un ensemble dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'où le résultat. ⊠

4 Le centre de l'algèbre enveloppante

Le but de cette section est d'exploiter le résultat obtenu dans le cadre commmutatif afin d'obtenir un analogue dans le monde non-commutatif. Pour ce faire, nous allons utiliser les notions d'algèbres filtrées et graduées, afin d'établir des bijections naturelles entre des ensembles. L'une d'elle nous donnera une correspondance entre les éléments invariants de l'algèbre de polynômes étudiée précédemment et le centre de l'algèbre de lie correspondante.

Cette section suit [2] pour la construction de la filtration.

(i) Premiers éléments du centre

On rappelle que $\mathfrak{g}$ peut être décrite comme l'algèbre de Lie dont une base vectorielle est les $(e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ qui vérifient les relations $[e_{i,j},e_{k,l}] = \delta_{j,k}e_{i,l} - \delta_{i,l}e_{k,j}$.

Commençons par introduire des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ qui ont de bonnes chances d'être dans le centre de l'algèbre enveloppante.

Définition III.5
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les éléments de $\mathfrak{g}$:

$$T_k = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant n} e_{i_1,i_2}\dots e_{i_k,i_1}.$$

◇ Remarque. Cette formule ne tombe pas du ciel : on cherche à faire le lien avec les générateurs $\overline{T}_k$ dans le cas commutatif.

On rappelle que le crochet est une dérivation sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, c'est à dire :

$$\forall a,b,c \in \mathfrak{g} : [ab,c] = a[b,c] + [a,c]b.$$

Le résultat suivant est la pierre de base de la description du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}_n$. Il justifie l'intérêt d'étudier les T_k, nous permettant d'espérer pouvoir étendre le résultat obtenu dans le cadre commutatif.

Théorème III.6
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k \in \mathcal{Z}\left(\mathfrak{U}\left(\mathfrak{gl}_n\right)\right)$.

Démonstration

La démonstration repose sur un petit constat qui simplifie grandement les calculs.

Pour montrer qu'un élément est dans le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, il suffit, d'après la première partie, de prouver que l'on commute avec tout élément de l'algèbre de Lie. Par construction, cela revient donc à vérifier que le commutateur entre cet élément et tout élément de l'algèbre de Lie est nul. Par bilinéarité du commutateur, on se ramène aux matrices élémentaires.

Ainsi, soit $a,b \in \{1,\dots,n\}$.

$$\left[\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant n} e_{i_1,i_2}\dots e_{i_k,i_1}, e_{a,b}\right] = \sum_{i_1,\dots,i_k} [e_{i_1,i_2}\dots e_{i_k,i_1}, e_{a,b}]$$

On décide de noter $e^k_{i,j} := \sum_{i_2,\ldots,i_k} e_{i,i_2}\ldots e_{i_k,j}$.[1] Mais alors, on montre par récurrence sur k que :

$$[e^k_{i,j}, e_{a,b}] = \delta_{j,a} e^k_{i,b} - \delta_{i,b} e^k_{a,j}.$$

En effet : pour $k = 1$, c'est vrai par définition de $\mathfrak{g}$. Puis, si l'on suppose le résultat acquis au rang $k-1$:

$$\begin{aligned}
[e^k_{i,j}, e_{a,b}] &= \sum_{i_2,\ldots,i_k} [e_{i,i_2}\ldots e_{i_k,i_1}, e_{a,b}] \\
&\overset{\text{dérivation}}{=} \sum_{i_2,\ldots,i_k} e_{i,i_2}\,[e_{i_2,i_3}\ldots e_{i_k,j}, e_{a,b}] + \sum_{i_2,\ldots,i_k} [e_{i,i_2}, e_{a,b}]\, e_{i_2,i_3}\ldots e_{i_k,j} \\
&= \sum_{i_2} e_{i,i_2} \left[\sum_{i_3,\ldots,i_k} e_{i_2,i_3}\ldots e_{i_k,j}, e_{a,b}\right] + \sum_{i_2} [e_{i,i_2}, e_{a,b}] \sum_{i_3,\ldots,i_k} e_{i_2,i_3}\ldots e_{i_k,j} \\
&= \sum_{i_2} e_{i,i_2} \left[e^{k-1}_{i_2,j}, e_{a,b}\right] + \sum_{i_2} [e_{i,i_2}, e_{a,b}]\, e^{k-1}_{i_2,j} \\
&= \sum_{i_2} e_{i,i_2} \left(\delta_{j,a} e^{k-1}_{i_2,b} - \delta_{i_2,b} e^{k-1}_{a,j}\right) + \sum_{i_2} \left(\delta_{i_2,a} e_{i,b} - \delta_{i,b} e_{a,i_2}\right) e^{k-1}_{i_2,j} \\
&= \sum_{i_2} \left(\delta_{j,a} e_{i,i_2} e^{k-1}_{i_2,b} - \delta_{i,b} e_{a,i_2} e^{k-1}_{i_2,j}\right) + e_{i,b} e^{k-1}_{a,j} - e_{i,b} e^{k-1}_{a,j} \\
&= \delta_{j,a} e^k_{i,b} - \delta_{i,b} e^k_{a,j}.
\end{aligned}$$

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant n} e_{i_1,i_2}\ldots e_{i_k,i_1}, e_{a,b}\right] &= \sum_{i_1} [e^k_{i_1,i_1}, e_{a,b}] \\
&= \sum_{i_1} \delta_{i_1,a} e^k_{i_1,b} - \delta_{i_1,b} e^k_{a,i_1} \\
&= e^k_{a,b} - e^k_{a,b} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

⊠

On va donc chercher à prouver que ces éléments suffisent pour engendrer le centre de l'algèbre enveloppante.

(ii) Filtration et algèbre graduée

Pour faire le lien entre le centre et les espaces invariants dont nous avons parlé jusqu'à présent, nous allons utiliser une structure particulière qui point naturellement lorsque l'on travaille avec des polynômes ou fonctions polynomiales : la filtration et l'algèbre graduée de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Cette sous-section s'inspire de [2].

Définition III.7 *Filtration canonique*
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit :

$$\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}) := \mathrm{Vect}\left(x_1 \ldots x_p | x_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{g}, p \leqslant n\right).$$

La suite $(\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}))_{n\geqslant 0}$ est appelée *filtration canonique* de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

◇ Remarque. On constate que la filtration canonique est croissante. Par ailleurs :

$$\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}; \quad \mathfrak{U}_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}); \quad \mathfrak{U}_n(\mathfrak{g})\,\mathfrak{U}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}_{n+m}(\mathfrak{g}).$$

La n-ème filtration est donc engendrée par les produits d'au plus n éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Mais que se passe-t-il si l'on s'intéresse aux produits d'exactement n éléments parmi ceux-ci ?

Définition III.8 *Algèbre graduée associée à une filtration*
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$A^n := \mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}) / \mathfrak{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$$

avec la convention $\mathfrak{U}_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. On définit alors *l'algèbre graduée associée à la filtration* $(\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}))$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

1. Ce choix ne sort pas de nulle part parce qu'il nous arrange : se référer à l'annexe pour voir le lien avec les matrices

par :

$$A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A^i.$$

Propriété III.9
L'algèbre graduée A est une algèbre commutative.

Démonstration

Tout d'abord, il s'agit bien d'une algèbre : le produit sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ induit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $A^n \times A^m$ dans A^{n+m}, définie via

$$\mu : \left| \begin{array}{rcl} A^n \times A^m & \longrightarrow & A^{n+m} \\ (\overline{x},\overline{y}) & \longmapsto & \overline{xy} \end{array} \right. .$$

Cette opération est bien définie : pour $\overline{x} = x + \mathfrak{U}_{n-1}(\mathfrak{g}), \overline{y} = y + \mathfrak{U}_{m-1}(\mathfrak{g})$, on a $\mu(\overline{x},\overline{y}) = xy + \mathfrak{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g}) = \overline{xy}$.

Montrons maintenant que cette algèbre est commutative.

Pour ce faire, soit $x \in A^n$, $y \in A^m$. On veut prouver que $xy = yx$ dans A^{n+m}. Or, on sait déjà que $xy = yx + [x,y]$, donc il suffit de prouver que $[x,y] \in \mathfrak{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g})$ (on aura alors $[x,y] = 0$ dans A^{n+m} et donc le résultat).

Pour ce faire, on constate, en numérotant $x = x_1 \dots x_n$ et $y = x_{n+1} \dots x_{n+m}$ qu'il suffit de regarder si $x_1 \dots x_{n+m} - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n+m)} \in \mathfrak{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g})$ pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}$. Or, ceci est vrai d'après le lemme II.4, d'où le résultat.

⊠

En fait, il se trouve que l'algèbre graduée que nous venons de construire peut s'identifier à une autre algèbre bien connue : l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$.

Pour ce faire, on commence par exhiber une base de A. On fixe une base $(x_1, \dots, x_d)$ de $\mathfrak{g}$.

Définition III.10 *Homomorphisme canonique*
La commutativité de A permet d'étendre l'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans A de manière unique en un homomorphisme de groupe φ de $S(\mathfrak{g})$ dans A, telle que $\varphi(1) = 1$. On l'appelle alors *homomorphisme canonique*.

Propriété III.11
L'homomorphisme canonique de $S(\mathfrak{g})$ dans A est un isomorphisme.

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème PBW II.10, une base étant envoyé sur une base. ⊠

5 De l'algèbre symétrique à l'algèbre enveloppante

Nous allons maintenant établir le lien entre les invariants par l'action de A pour l'algèbre commutative et le centre de l'algèbre enveloppante.

Pour ce faire, en fixant une base $(x_1, \dots, x_N)$ de $\mathfrak{g}$, on rappelle que $\mathfrak{U}_l(\mathfrak{g}) := \mathrm{Vect}\left(x_{i_1} \dots x_{i_p}, \quad p \leqslant l\right)$, qu'un de ses bases est donnée par $\{x_{i_1} \dots x_{i_p}, \quad i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p,\ p \leqslant l\}$ (toujours d'après le théorème PBW II.10).

Par ailleurs, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U}_l(\mathfrak{g})$ est un $\mathfrak{g}$-module. En particulier, cet espace est stable par $\mathfrak{g}$, donc le quotient $A^l = \mathfrak{U}_l(\mathfrak{g}) / \mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g})$ est également un $\mathfrak{g}$-module. On peut, à l'instar de l'identification effectuée dans la proposition III.10, obtenir l'identification :

Proposition III.12
On a un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules :

$$\varphi_l : \left| \begin{array}{rcl} A^l & \longrightarrow & S_l(\mathfrak{g}) \\ x_{i_1} \dots x_{i_l} + \mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g}) & \longmapsto & \overline{x}_{i_1} \dots \overline{x}_{i_l} \end{array} \right. .$$

On rappelle la définition des applications $\overline{T}_k = \sum_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_2} \dots \overline{e}_{i_k,i_1}$ de $\mathrm{Pol}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On constate alors :

$$\varphi_k(T_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_2} \dots \overline{e}_{i_k,i_1} = \overline{T}_k.$$

On en déduit alors l'image des polynômes en les T_k :

$$\varphi_l : \left| \begin{array}{rcl} A^l & \longrightarrow & S_l(\mathfrak{g}) \\ P_l(T_1,\ldots,T_n) + \mathfrak{U}_{n-1}(\mathfrak{g}) & \longmapsto & P_l(\overline{T}_1 \ldots \overline{T}_n) \end{array} \right.$$

où P_l est un polynôme tel que $P_l(\overline{T}_1,\ldots,\overline{T}_n)$ soit un polynôme de degré l en les $\overline{T}_i$.

De cette observation, on en déduit la description du centre suivante.

Théorème III.13 *Centre de l'algèbre enveloppante*
Le centre de l'algèbre enveloppante est engendré, en tant qu'algèbre, par les T_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Démonstration

Procédons par récurrence sur le degré de $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ (x étant exprimé dans la base PBW).

– Si x est de degré 0, alors il s'agit d'une constante qui s'exprime évidemment comme un polynôme en les $T_1,\ldots,T_n$.
– Passons à l'hérédité. Supposons que $x \in \mathfrak{U}_l(\mathfrak{g})/\mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g})$ (i.e : x est de degré l, mais pas de degré $l-1$). On le décompose alors en $y + \mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g})$. Alors, $\varphi_l(x) \in S_l(\mathfrak{g})$, via la correspondance exhibée précédemment.

D'après le théorème III.4 dans le cas commutatif, on sait alors que $\varphi_l(x) = P_l\left(\overline{T}_1,\ldots,\overline{T}_n\right)$ avec P_l polynôme de degré l. On sait alors, via la correspondance précédant l'énoncé du théorème, que $x = P(T_1,\ldots,T_n) + y$.

Or, $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ par hypothèse et $P(T_1,\ldots,T_n) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ d'après le théorème III.6. Ainsi $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ et y est de degré $< l$. Par hypothèse de récurrence, $y \in \mathbb{C}[T_1,\ldots,T_n]$, d'où finalement $x \in \mathbb{C}[T_1,\ldots,T_n]$.

⊠

◇ Remarque. On pourrait montrer, en utilisant les mêmes types d'arguments, que les $T_1,\ldots,T_n$ sont algébriquement indépendants.

IV Extension aux uplets de matrices

Le but de cette section, inspirée de [3] est d'établir un analogue au résultat des polynômes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariants sous l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour les polynômes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d$ (d entier fixé) invariants sous l'action naturelle de $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour simplifier les raisonnements, on introduit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n, de sorte qu'on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{End}(V)$.

1 Contexte

On peut définir naturellement une action de G sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d$ par

$$\rho^d : \left| \begin{array}{rcl} G \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d \\ (Q,(A_1,\ldots,A_d)) & \longmapsto & \left(QA_dQ^{-1},\ldots,QA_dQ^{-1}\right) \end{array} \right. .$$

L'objectif de cette section est donc d'établir une liste de générateurs, analogue aux T_k vu dans le cas d'une matrice, de l'algèbre des polynômes invariants par cette action, que l'on notera $(\mathrm{Pol}^d)^G$. On procèdera donc en deux temps :

1. établir une liste de générateurs ;
2. réduire le nombre de ces générateurs.

2 Générateurs de $(Pol^d)^G$

On commence par identifier, pour $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{End}(V)^{\otimes d}$ et $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$, via :

$$: \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{End}(V)^{\otimes d} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V^{\otimes d}) \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_d & \longmapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_d \mapsto f_1(x_1) \otimes \cdots \otimes f_i(x_d) \end{array} \right. .$$

On considère alors le plongement de G dans $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ via l'action diagonale :

$$A \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_d = Av_1 \otimes \cdots \otimes Av_d =: \lambda_A(v_1,\ldots,v_d).$$

Le centralisateur de G dans $\mathrm{End}\left(V^{\otimes d}\right)$ est l'ensemble des applications linéaires λ de $V^{\otimes d}$ telles que, pour toute matrice $A \in G$, on a $\lambda \circ \lambda_A = \lambda_A \circ \lambda$, ou encore $\lambda = \lambda_A \circ \lambda \circ \lambda_{A^{-1}}$.

Or, si λ est G-linéaire : $\lambda \circ \lambda_{A^{-1}} = \lambda_{A^{-1}} \circ \lambda$ et donc λ est dans ce centralisateur. Réciproquement, si λ est dans le centralisateur, alors :

$$A \cdot \lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \lambda(Av_1 \otimes \cdots \otimes Av_d)$$

et donc λ est G-linéaire.

D'après la dualité de Schur-Weyl [4], cette algèbre est engendrée, en tant qu'espace vectoriel, par les $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$, où $\lambda_\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_d) := (v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(d)})$.

On considère l'application :

$$\pi : \left|\begin{array}{rcl}\mathrm{End}(V^{\otimes d}) & \longrightarrow & \left(V^{*\otimes d}\otimes V^{\otimes d}\right)^* \\ \lambda & \longmapsto & \left((\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d)\mapsto \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_d\left(\lambda(x_1\otimes\cdots\otimes x_d)\right)\right)\end{array}\right. .$$

◇ Remarque. L'espace vectoriel $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ est muni d'une structure de G-module via l'action par conjugaison par λ_A $(A\in G)$.

L'espace vectoriel $V^{*\otimes d}\otimes V^{\otimes d}$ est muni d'une structure de G-module en tant que produits tensoriels de G-modules. À ce titre, $\left(V^{*\otimes d}\otimes V^{\otimes d}\right)^*$ est muni d'une structure de G-module via la représentation duale.

Propriété IV.1
L'application π est un isomorphisme de G-modules.

Démonstration

L'application est clairement linéaire. Prouvons qu'elle est bijective.

Tout d'abord, montrons qu'elle est injective : soit $\lambda\in\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ telle que $\pi(\lambda)=0$. Si λ n'est pas nulle, alors il existe $x := x_1\otimes\cdots\otimes x_d$ tel que $\lambda(x)\neq 0$. Or, $\varphi := \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_d(f(x)) = 0$ pour toutes applications $\varphi_k\in V^*$. Nécessairement, $f(x)=0$ (par exemple, $\lambda(x)$ appartient à l'intersection des noyaux des applications φ formant une base de $\mathrm{End}(V^{*\otimes d})$ qui est réduite à $\{0\}$) : absurde.

Par ailleurs, il y a égalité des dimensions $(\dim(V)^{2d})$ des espaces d'arrivée et de départ, d'où π isomorphisme.

Enfin, π est bien un morphisme de G-module. En effet, notons $f := \pi(\lambda)$, de sorte que $f(\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d) = \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_d\left(\lambda(x_1,\ldots,x_d)\right)$. On souhaite donc montrer que $\pi\left(\lambda_A\lambda\lambda_A^{-1}\right) = A\cdot f$.

Or :

$$\begin{aligned}\pi\left(\lambda_A\lambda\lambda_A^{-1}\right)(\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d) &= \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_d\left(\lambda_A\lambda\lambda_A^{-1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_d)\right)\\ &= \varphi_1\otimes\ldots\varphi_d\left(A\otimes\cdots\otimes A\cdot\lambda\left(A^{-1}x_1\otimes\cdots\otimes A^{-1}x_d\right)\right)\\ &= A^{-1}\cdot\varphi_1\otimes\cdots\otimes A^{-1}\cdot\varphi_d\left(\lambda\left(A^{-1}x_1\otimes\cdots\otimes A^{-1}x_d\right)\right)\\ &= f\left(A^{-1}\cdot\varphi_1\otimes\cdots\otimes A^{-1}x_d\right)\\ &= A\cdot f\left(\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat. ⊠

On cherche donc une expression explicite de l'image des λ_σ via π.

Théorème IV.2
L'ensemble des formes linéaires de $V^{*\otimes d}\otimes V^{\otimes d}$ G-invariantes est linéairement engendrée par les

$$\mu_\sigma(\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d) := \prod_{j=1}^d \varphi_{\sigma(j)}x_j$$

avec $\sigma\in\mathfrak{S}_d$.

Démonstration

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_d$. On note $\mu_\sigma := \pi(\lambda_\sigma)$. D'après ce qui précède, il suffit donc de prouver que l'expression de μ_σ est bien celle énoncée dans le théorème.

Or, pour $\varphi_1\otimes\ldots\varphi x_d$:

$$\begin{aligned}\pi(\lambda_\sigma)(\varphi_1\otimes\cdots\otimes x_d) &= \varphi\left(\lambda_\sigma(x)\right)\\ &= \varphi(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(d)})\\ &= \prod_{j=1}^d \varphi_j(x_{\sigma^{-1}(j)})\\ &= \prod_{j=1}^d \varphi_{\sigma(j)}(x_j).\end{aligned}$$

d'où le résultat. ⊠

Maintenant, nous allons donner une expression plus commode de ces μ_σ, à l'aide de la trace, de sorte à généraliser le résultat trouvé dans le cas d'une matrice.

On souhaite maintenant faire le lien entre $V^{*\otimes d} \otimes V^{\otimes d}$ et $\mathrm{End}(V)^{\otimes d}$. En effet, nous connaissons déjà, grâce à la dualité de Schur-Weyl, un ensemble générateurs des formes linéaires G-invariantes de $\mathrm{End}(V)^{\otimes d}$, qu'on souhaite exprimer pour $V^{*\otimes d} \otimes V^{\otimes d}$.

On rappelle qu'on dispose d'un isomorphisme canonique entre $\mathrm{End}(V)$ et $V^* \otimes V$ via

$$\phi \colon \left| \begin{array}{rcl} V^* \otimes V & \longrightarrow & \mathrm{End}(V) \\ \varphi \otimes v & \longmapsto & u \mapsto \varphi(u)v \end{array} \right. .$$

Qui plus est, il s'agit d'un morphisme de G-module :

$$\phi(A \cdot \varphi \otimes A \cdot v) = \big(u \mapsto \varphi(A^{-1} \cdot u) A \cdot v\big) = A \circ \phi(\varphi \otimes v) \circ A^{-1}.$$

Un élément de $\mathrm{End}(V)$ associé à un tenseur pur $\varphi \otimes v$ est dit *décomposable*. On peut montrer qu'un endomorphisme est décomposable si, et seulement si, il est de rang 1.

À partir de cette identification, on définit une multiplication et une application trace pour ces endomorphismes.

Définition IV.3
Soit $\varphi,\psi \in V^*$, $u,v \in V$. Alors, on définit :

- une multiplication : $\varphi \otimes v \cdot \psi \otimes u := \varphi \otimes \psi(v)u$;
- une application trace : $\mathrm{Tr}(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$.

◇ Remarque. Ces définitions sont bien cohérentes avec l'isomorphisme ϕ exhibé précédemment, dans le cas des endomorphismes décomposables : soient $\lambda,\mu \in \mathrm{End}(V)$ tels que $\lambda(w) = \varphi(w)v$, $\mu(w) = \psi(w)u$. Alors :

$$\mu \circ \lambda(w) = \mu(\varphi(w)v) = \psi(v)\varphi(w)u.$$

Or, d'autre part :

$$(\varphi \otimes \psi(v)u)\,(w) = \varphi(w)\psi(v)u.$$

Concernant la trace, un endomorphisme λ étant décomposable, on sait que $\lambda^2 = \mathrm{Tr}(\lambda)\lambda$. Or, via la multiplication précédemment définie, on constate :

$$(\varphi \otimes v)^2 = \varphi(v)\varphi \otimes v.$$

On peut dès lors considérer l'isomorphisme de G-modules :

$$\phi_d \colon \left| \begin{array}{rcl} V^{*\otimes d} \otimes V^{\otimes d} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V)^{\otimes d} \\ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes x_d & \longmapsto & \phi(\varphi_1 \otimes x_1) \otimes \cdots \otimes \phi(\varphi_d \otimes x_d) \end{array} \right. .$$

Nous connaissons déjà une expression d'un ensemble générateur des formes linéaires G-invariantes de $V^{*\otimes d} \otimes V^{\otimes d}$: il ne reste plus qu'à les réinterpréter du point de vue de $\mathrm{End}(V)^{\otimes d}$.

Pour ce faire, on fixe $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, que l'on décompose en cycles à supports disjoints : $\sigma = (i_1 \ldots i_k)(j_1 \ldots j_n) \ldots (t_1 \ldots t_l)$.

Théorème IV.4
Soient $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{E}nd(V)$. Alors :

$$\mu_\sigma(A_1 \otimes \cdots \otimes A_d) = \mathrm{Tr}(A_{i_1} \ldots A_{i_k})\,\mathrm{Tr}(A_{j_1} \ldots A_{j_n}) \ldots \mathrm{Tr}(A_{t_1} \ldots A_{t_l}).$$

Démonstration

Chacun des membres est multilinéaire : on peut se contenter de travailler sur les matrices décomposables. On considère donc le cas où $A_j = \varphi_j \otimes x_j$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mu_\sigma(A_1 \otimes \cdots \otimes A_d) &= \mu_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_d) \\ &= \varphi_{\sigma(1)}(x_1) \ldots \varphi_{\sigma(d)}(x_d) \\ &= \varphi_{i_2}(x_{i_1}) \ldots \varphi_{i_1}(x_{i_k}) \ldots \varphi_{\sigma(t_1)}(x_{t_l}) \end{aligned}$$

Or, si on considère par exemple

$$M := \varphi_{i_2}(x_{i_1}) \ldots \varphi_{i_1}(x_{i_k}),$$

on constate, via la définition du produit :

$$\varphi_{i_1} \otimes x_{i_1} \cdot \cdots \cdot \varphi_{i_k} \otimes x_{i_k} = \varphi_{i_2}(x_{i_1}) \ldots \varphi_{i_k}(x_{i_{k-1}}) \varphi_{i_1} \otimes x_{i_k}.$$

En particulier, en passant aux traces :

$$\mathrm{Tr}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = M$$

d'où le résultat. ⊠

Nous avons donc désormais tous les ingrédients pour le théorème fondamental.

Théorème IV.5 *Théorème fondamental*
L'algèbre $(\mathrm{Pol}^d)^G$ est algébriquement engendrée par les applications

$$\overline{T}_{a_1,\dots,a_k} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A_1,\dots,A_d & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A_{a_1}\dots A_{a_k}) \end{array} \right.$$

avec $a_1,\dots,a_k \in \{1,\dots,d\}$.

Démonstration
Nous avons déjà un résultat dans le cas multilinéaire, pour tout nombre de variables. L'idée est donc de ramener le cas non multilinéaire au cas multilinéaire, avec davantage de variables. Pour ce faire, on procède à une *polarisation.* [2]

Déjà, constatons que l'on peut se contenter de prouver le résultat dans le cas d'un polynôme homogène. En effet, si l'on a le résultat pour les polynômes homogènes, on peut écrire P comme somme de polynômes homogènes. Par ailleurs, l'action de G sur les polynômes préserve le degré : ainsi, l'action de G préserve les composantes homogènes.

Ainsi, si l'on écrit $P = \sum P_H$ où les P_H sont des polynômes homogènes de degrés distincts, on constate que P est G-invariant si et seulement si tous les P_H sont G-invariants.

- Si $M \cdot P_H = P_H$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n()$, alors $M \cdot P = P$.
- Si $M \cdot P = P$, on a donc $\sum P_H = \sum M \cdot P_H$. Or, $\deg(M \cdot P_H) = \deg(P_H)$. Par unicité des polynômes à degré fixé dans la décomposition en polynômes homogènes, on obtient finalement $M \cdot P_H = P_H$.

Chaque polynôme homogène s'écrit donc comme combinaison algébrique de $\overline{T}_{i_1,\dots,i_k}$ et on a bien le résultat pour P.

Ainsi, soit $P \in (\mathrm{Pol}^d)^G$, tel que pour $(A_1,\dots,A_d) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d$, $P(A_1,\dots,A_d)$ soit homogène de degré l. On considère alors le polynôme $\tilde{P}$ à $l \times d$ variables, défini par :

$$\tilde{P}\left(A_1^{(1)},\dots,A_d^{(1)},\dots,A_1^{(l)},\dots A_d^{(l)}\right) = \frac{1}{l!}\left(P\left(\lambda_1(A_1^{(1)},\dots,A_d^{(1)}) + \dots + \lambda_l(A_1^{(l)},\dots,A_d^{(l)})\right)_{|\lambda_1\dots\lambda_l}\right)$$

où cette dernière notation désigne le terme devant le coefficient $\lambda_1\dots\lambda_l$.

On vérifie alors :

1. $\tilde{P}$ est bien ld-linéaire ;
2. $\tilde{P}$ est bien dans $(\mathrm{Pol}^{ld})^G$.

On peut dès lors utiliser le théorème IV.4 pour conclure. En effet, on sait que $\tilde{P}$ s'exprimera en fonction de $\mathrm{Tr}(A_{i_1}\dots A_{i_k})$.

Or, par construction, $\tilde{P}(A_1,\dots,A_d,\dots,A_1,\dots,A_d) = P(A_1,\dots,A_d)$. En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(A_1,\dots,A_d,\dots,A_1,\dots,A_d) &= \frac{1}{l!}\left(P((\lambda_1+\dots+\lambda_l)(A_1,\dots,A_d))_{|\lambda_1\dots\lambda_l}\right) \\ &\overset{P\text{homogène}}{=} \left(\frac{(\lambda_1+\dots+\lambda_l)^l}{l!}\right)_{|\lambda_1\dots\lambda_l} P(A_1,\dots,A_d) \\ &= P(A_1,\dots,A_d) \end{aligned}$$

et donc P s'exprime également en fonction des $\overline{T}_{a_1,\dots,a_k}$. [3] ⊠

3 Réduction du nombre de générateurs

Maintenant, on souhaite voir si tous ces générateurs sont nécessaires. Nous allons en fait voir que non : on peut se borner à un nombre de générateurs dépendant de la taille n des matrice que l'on considère. Pour ce faire, nous allons, comme dans le cas d'une matrice, faire appel à la théorie des algèbres graduées.

Pour ce faire, nous allons faire un détour vers une généralisation de notre algèbre invariante $T_d := \left(\mathrm{Pol}^d\right)^G$: l'algèbre des *concomitants*.

(i) Les concomitants

Définition IV.6
Un *concomitant* est une application polynomiale $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ compatible avec les structures de G-modules, c'est-à-dire :

$$\forall Q \in G, \forall (A_1,\dots,A_d) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d : \quad \psi(QA_1Q^{-1},\dots,QA_dQ^{-1}) = Q\psi(A_1,\dots,A_d)Q^{-1}.$$

2. *fully polarization* dans l'article de Procesi [3]
3. Des exemples de calculs de polarisation sont donnés en annexe.

On note S_d l'ensemble des concomitants.

◇ Remarque. – S_d est munie d'une structure d'anneau via la somme et la multiplication point par point, dont l'unité est l'application constante égale à I_n.

– Il est possible de décrire S_d comme le sous-anneau des fonctions polynomiales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des invariants sous l'action de G : $(g \cdot \psi)(u) = g \cdot (\psi(g^{-1}u))$.

– En identifiant $\mathbb{C}$ et le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut constater que T_d est un sous-anneau du centre de S_d. En fait, on peut prouver que c'est exactement le centre lorsque $d > 1$ et $n > 1$ (sinon, S_d est commutative).

– Un élément de S_d est une matrice à coefficients dans T_d. Puisque les éléments de T_d sont des polynômes, on peut définir une notion de degré pour un concomitant : il s'agit du max des degrés de ses coefficients.

– On peut alors décrire $(S_d)_0$ (éléments constants de S_d). Il s'agit des $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constants - donc tels qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tous $A_1, \dots, A_d$, $\psi(A_1, \dots, A_d) = M$ - qui sont G-invariants. Ils vérifient donc

$$\forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \quad QMQ^{-1} = M.$$

On sait alors que M est une matrice scalaire, d'où $(S_d)_0 \simeq \{\lambda I_n : \quad \lambda \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$.

En particulier, S_d est une T_d-algèbre, dont on connaît une famille de générateurs.

Proposition IV.7
L'anneau S_d est engendré, en tant que T_d-algèbre, par les concomitants $X_j : (A_1, \dots, A_d) \mapsto A_j$.

Démonstration

Soit $f : (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^d \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un concomitant. Nous allons lui associer un invariant $\overline{f} : (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^{d+1} \to \mathbb{C}$ de sorte à nous ramener au théorème IV.5. On définit donc :

$$\overline{f}(A_1, \dots, A_{d+1}) = \mathrm{Tr}\left(f(A_1, \dots, A_d)A_{d+1}\right).$$

Remarque : si $f, g \in S_d$ sont tels que $\overline{f} = \overline{g}$, alors $f = g$. En effet, soient $(A_1, \dots, A_d) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^d$. Si pour tout $A_{d+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\mathrm{Tr}(f(A_1, \dots, A_d)A_{d+1}) = \mathrm{Tr}(g(A_1, \dots, A_d)A_{d+1})$, alors $f(A_1, \dots, A_d) = g(A_1, \dots, A_d)$ par non-dégénérescence de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$. Puisque c'est vrai pour tout élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^d$, on a bien $f = g$.

Par ailleurs, on constate que $\overline{f}$ est G-invariante : ainsi, d'après le théorème IV.5, $\overline{f}$ est polynomiale en les éléments $\mathrm{Tr}(A_{i_1} \dots A_{i_j})$. Par ailleurs, on constate que, par définition, $\overline{f}$ est linéaire en A_{d+1} : nécessairement, les $\mathrm{Tr}(A_{i_1} \dots A_{i_j})$ le sont donc également, et donc $d+1$ apparaît au plus une fois dans chaque produit de $T_{i_1, \dots, i_j}$. Quitte à permuter grâce aux propriétés de la trace, on peut donc écrire

$$\overline{f} = \sum \lambda_{i_1, \dots, i_j} \mathrm{Tr}(A_{i_1} \dots A_{i_j} A_{d+1})$$

où $\lambda_{i_1, \dots, i_j} \in T_d$, $i_1, \dots, i_j \neq d+1$.

Ainsi, on a

$$\overline{f}(A_1, \dots, A_{d+1}) = \overline{g}(A_1, \dots, A_{d+1})$$

avec $\overline{g} = \mathrm{Tr}(\sum \lambda_{i_1, \dots, i_j} A_{i_1} \dots A_{i_j} \cdot A_{d+1})$. D'après la remarque, on a donc bien

$$f = \sum \lambda_{i_1, \dots, i_j} X_{i_1} \dots X_{i_j}.$$

⊠

On constate que les graduations définies pour T_d et S_d sont compatibles avec la structure de T_d-module de S_d (i.e : $(T_d)_k (S_d)_l \subset (S_d)_{k+l}$). On va maintenant rappeler quelques résultats de la théorie des modules gradués que nous utiliserons dans ce cadre, notamment le lemme gradué de Nakayama.

Soit $R = \bigoplus_{k \geqslant 0} R_k$ une algèbre graduée, avec $R_0 = \mathbb{C}$. On notera $R^+ := \bigoplus_{k > 0} R_k$.

Lemme IV.8 *Nakayama*
Soient M un R-module gradué et N un R-sous-module gradué de M. Si $M = N + R^+M$, alors $N = M$.

Démonstration

On ne travaille qu'avec des éléments homogènes (grâce aux structures de graduation).

Déjà, il est clair que $N \subset M$. Montrons l'inclusion réciproque par récurrence sur le degré d'un élément $m \in M$.

On note k_0 le degré minimal de $M = \sum_{k \geqslant k_0} M_d$.

Alors, par hypothèse, il existe $y \in N$, $f \in R^+$ et $x \in M$ tels que $m = y + fx$. Puisque l'on travaille avec des éléments homogènes, on a, sous réserve de non-nullité :

$$\deg(m) = \deg(y) = \deg(fx).$$

Initialisation Si $\deg(m) = k_0$, alors nécessairement $m = y \in N$. En effet : puisque $f \in R^+$, le produit de x par f est forcément d'un degré strictement supérieur à x. De fait, $\deg(fx) > k_0$ d'où le résultat, m étant homogène.

Hérédité Il s'ensuit que, si $\deg(m) > k_0$, alors soit $x = 0$, et donc $m = y \in N$, soit $\deg(x) < \deg(m)$. Dans ce cas, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : $x \in N$. Puisque N est un R-module, on a $m = y + fx \in N$.

⊠

Lemme IV.9
Pour tout $f \in S_d^+$, il existe un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans T_d^+ qui annule f.

Démonstration

Il est possible de voir un élément $f \in S_d$ comme une matrice à coefficients dans T_d. On notera dès lors $\vec{A} := (A_1, \dots, A_d)$ et $\overrightarrow{PAP^{-1}} := \left(PA_1P^{-1}, \dots, PA_dP^{-1}\right)$.

Or, cette matrice possède un polynôme caractéristique χ_f, de degré n, dont les coefficients sont des éléments de T_d. Montrons que ces coefficients sont en fait dans T_d^+.

En effet, en écrivant donc le polynôme caractéristique :

$$\chi_f = X^n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{n-j},$$

on constate que

$$\lambda_j\left(\vec{A}\right) = Q_j(f(\vec{A}))$$

avec Q_j un polynôme invariant non constant en 1 matrice (i.e : $Q_j \in T_1^+$).

Puisque $f \in S_i$, on sait que $f(\overrightarrow{PAP^{-1}}) = Pf(\vec{A})P^{-1}$. Mais alors :

$$\lambda_j\left(\overrightarrow{PAP^{-1}}\right) = Q_j\left(f\left(\overrightarrow{PAP^{-1}}\right)\right) = Q_j\left(Pf\left(\vec{A}\right)P^{-1}\right) = Q_j\left(f\left(\vec{A}\right)\right) = \lambda_j\left(\vec{A}\right)$$

d'où $\lambda_j \in T_d$.

Enfin, $\lambda_j \in T_d^+ \Leftrightarrow \lambda_j\left(\vec{0}\right) = 0$. Or, $\lambda_j\left(\vec{A}\right) = Q_j\left(f\left(\vec{A}\right)\right)$. Puisque $Q_j \in T_1^+$ et $f \in S_d^+$, alors $Q_j(f(\vec{0})) = Q_j(0) = 0$, etc donc $\lambda_j \in S_d^+$.

⊠

Ce fait primordial, couplé au lemme de Nakayama, nous permet d'exhiber un ensemble générateur de S_d en tant que T_d-module.

Théorème IV.10
L'algèbre S_d est engendrée, en tant que T_d-module, par les monômes en les $X_1, \dots, X_d$ de degré $\leqslant 2^n - 2$.

Démonstration

Soit l'algèbre $U = S_d^+/T_d^+S_d$. Déjà, U est bien définie : si $s \in S_d$ et $t \in T_d^+$, alors $\deg(ts) = \deg(t) + \deg(s) > 0$ donc $ts \in S_d^+$.

On note $\overline{X_j}$ est l'image de $X_j \in S_d^+$ par la projection canonique sur U. Montrons que U est engendré, en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, par les monômes en $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_d$ de degré $\leqslant 2^n - 2$.

On sait, d'après la proposition IV.7, que U est engendrée, en tant que T_d-algèbre, par les $\overline{X}_j$. Il suffit donc de prouver que l'algèbre U est *nilpotente d'indice* $\leqslant 2^n - 1$ (ie : tout produit de $2^n - 1$ éléments est nul) pour conclure.

Or, soit $s \in S_d$. Alors, d'après la remarque précédant le théorème, il existe un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans T_d^+ qui annule s. Mais alors, on obtient dans U : $\overline{s}^n = 0$. Ainsi, tout élément de U est nilpotent d'indice $\leqslant n$. Mais alors, d'après le lemme de Nagata-Higman [5], U est nilpotente d'indice $2^n - 1$, d'où le résultat.

Considérons maintenant M le T_d-sous-module de S_d engendré par les monômes en les $X_1, \dots, X_d$ de degré $\leqslant 2^n - 2$.

On veut montrer que $S_d = M$, ce qui concluera la preuve. Puisque M est un sous-module de S_d, on peut appliquer le lemme de Nakayama : on souhaite donc montrer que

$$S_d = M + T_d^+ S_d.$$

Puisque $U = S_d^+/T_d^+S_d$, on sait qu'un élément f de S_d^+ s'écrit :

$$f = P(X_1, \dots, X_d) + g$$

avec $g \in T_d^+ S_d$ et P polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré $\leqslant 2^n - 2$.

En particulier, puisque $\mathbb{C} \subset T_d$, on a $P(X_1, \ldots, X_d) \in M$, et donc $S_d^+ \subset M + T_d^+ S_d$.

D'autre part, on a déjà vu (remarque 19) que $(S_d)_0 = \mathbb{C}$. Or $\mathbb{C} \subset M$ (polynômes constants en $X_1, \ldots, X_d$), donc $(S_d)_0 \subset M + T_d^+ S_d$.

Finalement, $S_d = M + T_d^+ S_d$, donc d'après le lemme de Nakayama, $S_d = M$. Ainsi S_d est bien engendré, en tant que T_d-module, par les monômes en les $X_1, \ldots, X_d$ de degré $\leqslant 2^n - 2$.

⊠

◇ Remarque. Il a en fait été prouvé que l'on pouvait se contenter des monômes de degré $\leqslant n^2 - 1$. De plus, il existe une conjecture, non démontrée à ce jour pour $n > 3$, selon laquelle on pourrait améliorer ce résultat jusqu'à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Le résultat a été prouvé pour $n \leqslant 4$.

On dipose donc déjà d'un premier résultat pour limiter le nombre de générateurs nécessaires, pour l'algèbre des concomitants. L'idée est de maintenant lier ce résultat à celui qui nous intéresse sur l'algèbre des polynômes invariants.

Définition IV.11
On définit une application T_d-linéaire

$$t\colon \left| \begin{array}{rcl} S_d & \longrightarrow & T_d \\ X_{i_1} \ldots X_{i_j} & \longmapsto & \overline{T}_{i_1, \ldots, i_j} \end{array} \right. .$$

Définition IV.12
On définit $\mathcal{X}$ la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les X_j et $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X} X$ où $X = \{X_1, \ldots, X_d\}$.

Proposition IV.13
Les éléments $t(\mathcal{X}^+)$ engendrent T_d^+ en tant qu'idéal de T_d.

Démonstration

Cela résulte du premier théorème fondamental IV.5. ⊠

Théorème IV.14 *Amélioration du théorème fondamental*
La $\mathbb{C}$-algèbre T_d est engendrée par les $\overline{T}_{i_1, \ldots, i_j}$ avec $j \leqslant 2^n - 1$.

Démonstration

On note E l'ensemble des monômes en les éléments de $X := (X_1, \ldots, X_d)$ de degrés $\leqslant 2^n - 2$. On a donc vu que S_d est engendré, en tant que T_d-module, par E, c'est-à-dire $S_d = T_i E$.

On note A la $\mathbb{C}$-sous-algèbre de T_d générée par les $t(r)$, avec r monôme en les X_j de degré $\leqslant 2^n - 1$. On voit A comme une algèbre graduée (qui est compatible avec la graduation de T_d).

L'objectif est donc de prouver que $A = T_d$. Puisque l'on travaille avec des algèbres et modules gradués et que T_d est un A-module, on peut utiliser le lemme de Nakayama : montrons que $T_d = A + A^+ T_d$.

Puisque $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X} X$, on a :

$$\begin{aligned} t(\mathcal{X}^+) &\subset t(\mathcal{X} X) \\ &\subset t(S_d X) \\ &\subset t(T_d E X) \\ &\subset T_d t(EX) \\ &\subset T_d A^+. \end{aligned}$$

Mais alors $T_d^+ = T_d t(\mathcal{X}^+) \subset T_d T_d A^+ = T_d A^+$, d'où le résultat.

⊠

4 Analogue pour $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)$

Pour un résultat analogue dans le cas non commmutatif, on peut faire exactement la même chose que dans le cas à une matrice. On continue de considérer $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. On considère cette fois $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$ (ou $\mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}$). Commençons par regarder les propriétés de cet espace vectoriel.

Proposition IV.15

Une base de $\mathfrak{g}^d$ est donnée par les $(e_{i,j}^{(a)})_{1\leqslant a\leqslant d,\ 1\leqslant i,j\leqslant n}$, où
$$e_{i,j}^{(a)} = (0,\ldots,0,e_{i,j},0,\ldots,0)$$
où le coefficient $e_{i,j}$ est à la a-ème place.

On peut également munir $\mathfrak{g}^d$ d'une structure d'algèbre de Lie, en définissant le crochet par :
$$\left[e_{i,j}^{(a)}, e_{k,l}^{(b)}\right] := \delta_{a,b}\left(\delta_{j,k}e_{i,l}^{(a)} - \delta_{i,l}e_{k,j}^{(a)}\right).$$
On considère maintenant le plongement diagonal de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^d$, défini par :
$$\delta\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^d \\ e_{i,j} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{a=1}^{d} e_{i,j}^{(a)} \end{array}\right. .$$
On définit alors l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^d$ par restriction de l'action adjointe de $\mathfrak{g}^d$. Plus explicitement :
$$e_{i,j}\cdot e_{k,l}^{(a)} = \left(\delta_{j,k}e_{i,l}^{(a)} - \delta_{i,l}e_{k,j}^{(a)}\right).$$
L'objectif est d'étudier le centralisateur $\mathcal{Z}_d(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{g}}$. Pour ce faire, on va une nouvelle fois lier son étude à celle de $S(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{g}}$. En effet, on constate que
$$S(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{g}} = (\mathrm{Pol}^d)^{\mathfrak{g}}.$$
De manière analogue à ce qui précède, on peut établir l'isomorphisme :
$$(\mathrm{Pol}^d)^{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{C}[\overline{e}_{i,j}^{(a)}]_{a\in\{1,\ldots,d\}}.$$
De par leur définition, on obtient une expression explicite des $\overline{T}_{a_1,\ldots,a_k}$:
$$\overline{T}_{a_1,\ldots,a_k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \overline{e}_{i_2,i_1}^{(a_1)}\ldots\overline{e}_{i_1,i_k}^{(a_k)}.$$
Puisqu'on travaille ici dans un cadre commutatif, on peut réécrire :
$$\overline{T}_{a_1,\ldots,a_k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_k}^{(a_k)}\ldots\overline{e}_{i_2,i_1}^{(a_1)}.$$
En réindiçant ($i_k \leftrightarrow i_2$, ...), on obtient l'expression :
$$\overline{T}_{a_1,\ldots,a_k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_2}^{(a_k)}\ldots\overline{e}_{i_k,i_1}^{(a_1)}.$$
Nous allons considérer les éléments correspondant à ces générateurs $\overline{T}_{a_1,\ldots,a_k}$ dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)$. Comme précédemment, on considère $\mathfrak{U}_l(\mathfrak{g}^d) := \mathrm{Vect}\left(x_1\ldots x_p :\quad p\leqslant l,\ x_i\in\mathfrak{g}^d\right)$.
On a alors comme précédemment un isomorphisme de G-modules :
$$\varphi_l\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{U}_l(\mathfrak{g}^d)/\,\mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g}^d) & \longrightarrow & S_l(\mathfrak{g}^d) \\ x_{i_1}\ldots x_{i_l} + \mathfrak{U}_{l-1}(\mathfrak{g}^d) & \longmapsto & \overline{x}_{i_1}\ldots\overline{x}_{i_l} \end{array}\right. .$$
Nous avons donc besoin de définir l'analogue des T_k pour $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)$.

Définition IV.16
Pour $a_1,\ldots,a_k \in \{1,\ldots,d\}$, on définit :
$$T_{a_1,\ldots,a_k} := \sum_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1,i_2}^{(a_1)}\ldots e_{i_k,i_1}^{(a_k)}.$$

Proposition IV.17
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $a_1,\ldots,a_k \in \{1,\ldots,d\}$, on a
$$T_{a_1,\ldots,a_k} \in \mathcal{Z}_d(\mathfrak{g}).$$

Démonstration

On raisonne comme dans le cas d'une matrice. Soient $(a_1,\ldots,a_k)\in\{1,\ldots,d\}^k$.
Le calcul du commutateur entre un élément de la base de $\mathfrak{g}^d$ et
$$\left[T_{a_1,\ldots,a_k}, \sum_{a_0=1}^{d} e_{i,j}^{(a_0)}\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_k}\left[e_{i_1,i_2}^{(a_1)}\ldots e_{i_k,i_1}^{(a_k)}, \sum_{a_0=1}^{d} e_{i,j}^{(a_0)}\right]$$

On considère les éléments

$$e_{i,j}^{(a_1,\dots,a_k)} = \sum_{i_2,\dots,i_k} e_{i,i_2} \dots e_{i_k,j}.$$

On peut alors montrer par récurrence sur k (exactement comme dans le cas du théorème III.6) que

$$\left[e_{i,j}^{(a_1,\dots,a_k)}, \sum_{a_0=1}^{d} e_{a,b}^{(a_0)} \right] = \delta_{j,a} e_{i,b}^{(a_1,\dots,a_k)} - \delta_{i,b} e_{a,j}^{(a_1,\dots,a_k)}.$$

On constate alors :

$$\begin{aligned} \left[T_{a_1,\dots,a_k}, \sum_{a_0=1}^{d} e_{i,j}^{(a_0)} \right] &= \sum_{i_1} \left(\delta_{i_1,i} e_{i_1,j}^{(a_1,\dots,a_k)} - \delta_{i_1,j} e_{i,i_1}^{(a_1,\dots,a_k)} \right) \\ &= e_{i,j}^{(a_1,\dots,a_k)} - e_{i,j}^{(a_1,\dots,a_k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

⊠

Établissons maintenant la correspondance entre ces éléments et les générateurs du cas commutatif.

Proposition IV.18
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi_k(T_{a_1,\dots,a_k}) = \overline{T}_{a_k,\dots,a_1}.$$

Démonstration
En effet :

$$\varphi_k(T_{a_1,\dots,a_k}) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \overline{e}_{i_1,i_2}^{(a_1)} \dots \overline{e}_{i_k,i_1}^{(a_k)} = \overline{T}_{a_k,\dots,a_1}$$

⊠

Finalement, on en déduit, comme dans le cas d'une seule matrice, la description du centralisateur suivante.

Théorème IV.19
Le centralisateur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{g}}$ est engendré par les $T_{a_1,\dots,a_k}$ pour $a_i \in \{1, \dots, d\}$, avec $k \leqslant 2^n - 1$.

◇ Remarque. Comme dans le cas commutatif, on sait, d'après [6], que l'on peut affiner ce résultat jusqu'à n^2 (qui est une meilleure borne à partir de $n = 5$). On conjecture que l'on peut ne demander que $\frac{n(n+1)}{2}$ générateurs (le résultat est prouvé jusqu'à $n = 4$).

V Exemples concrets

1 Relations entre les T_k

D'après le théorème III.13, nous savons que pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, le centre est engendré par les T_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Mais pouvons-nous trouver des relations explicites ? L'idée est de d'abord étudier dans $\mathfrak{sl}$ et de trouver des relations, que l'on cherchera à généraliser dans $\mathfrak{gl}_n$ (puisqu'il y a un générateur de moins à considérer dans $\mathfrak{sl}_n$: celui de la trace d'une seule matrice, qui est nulle !).

(i) Étude de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Dans le cas $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tous les T_k s'expriment par rapport à T_2, via :

Lemme V.1
Pour $\mathfrak{sl}_2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_{2k+1} &= 0 \\ T_{2k} &= \frac{1}{2^{k-1}} (T_2)^k. \end{aligned}$$

(ii) Étude de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$

Un nouvelle fois, tous les T_k s'expriment par rapport à T_2, et on a cette fois les relations :

Proposition V.2
Pour $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, on a pour tout $k > 2$:

$$T_k = \frac{1}{2}T_{k-2}\left(T_2 - T_1^2\right) + T_{k-1}T_1.$$

(iii) Étude de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Dans le cas $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, tous les T_k pour $k \geqslant 3$ s'expriment par rapport à T_2 et T_3, via :

Proposition V.3
Pour $\mathfrak{sl}_3$, on a :

$$\forall k > 3 : T_k = \frac{1}{2}T_2T_{k-2} + \frac{1}{3}T_3T_{k-3}.$$

2 Étude des T_d

Nous allons maintenant regarder ce qu'il advient de ces résultats théoriques dans des cadres concrets. Certes, nous avons réduit le nombre de générateurs nécessaires, mais le sont-ils encore tous ? Si non, quelles relations pouvons-nous en dégager ? Nous allons nous intéresser au cas particulier de $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{sl}_3$, en nous inspirant de [7].

Dans toutes ces sections, les résultats ont été trouvés via Sage. Le principe est simple : on cherche des relations entre les différents générateurs. Si un générateur ne s'exprime pas par rapport aux autres, il est nécessaire. Sinon, son expression par rapport aux générateurs nécessaires est donnée.

(i) Le cas de $\mathfrak{sl}_2$

L'étude de $\mathfrak{sl}_2$ est connue [7] et mène à un résultat relativement simple à énoncer.

Théorème V.4
Les algèbres $T_d(\mathfrak{sl}_2)$ sont engendrées par les $T_{j,k}$ avec $j \leqslant k$ et les $T_{j,k,l}$ avec $j < k < l$.

Démonstration
D'après le théorème IV.14, on peut se contenter d'étudier les $T_{j,k}, T_{j,k,l}$ (les T_j étant nuls dans $\mathfrak{sl}_2$).

On constate déjà que, pour $j \leqslant k$, on a $T_{j,k} = T_{k,j}$: le cas $j \leqslant k$ suffit donc à traiter tous les cas pour deux matrices.

Puis, on constate de la même manière que, pour $j < k < l$:

$$\begin{aligned} T_{j,k,l} &= T_{l,j,k} \\ &= T_{k,l,j}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul nous donne

$$T_{j,l,k} = -T_{j,k,l}.$$

Puisque, comme précédemment, les $T_{k,j,l}$ et $T_{l,k,j}$ sont égaux à $T_{j,l,k}$, on vient finalement de vérifier que le cas $j < k < l$ suffit pour exprimer tous les cas $j \neq k, j \neq l, k \neq l$.

Si $j = k = l$, alors on sait, via le cas à trois matrices, que $T_{j,j,j} = -T_{j,j,j}$: ainsi, $T_{j,j,j} = 0$.

Enfin, reste les cas où, par exemple, $j \neq k, k = l$. Dans ce cas, on a de la même manière :

$$T_{j,k,k} = -T_{j,k,k},$$

on vérifie donc que ces traces sont nulles.

Finalement, les générateurs du théorème suffisent.

⊠

(ii) Le cas de $\mathfrak{gl}_2$

Nous savons, d'après l'étude menée dans le cadre théorique, que les générateurs essentiels de $T_d(\mathfrak{gl}_2)$ doivent être les mêmes que pour $T_d(\mathfrak{sl}_2)$, d'où :

Proposition V.5
Les algèbres $T_d(\mathfrak{gl}_2)$ sont engendrée par les $T_{j,k}$ avec $j \leqslant k$ et les $T_{j,k,l}$ avec $j < k < l$.

En revanche, pourr $\mathfrak{gl}_2$, on sait que les relations obtenues doivent généraliser les relations dans $\mathfrak{sl}_2$. Par exemple, on constate pour $j \neq k, k \neq l, j \neq l$:

$$T_{j,l,k} = -T_{j,k,l} - T_j T_k T_l + T_j T_{k,l} + T_k T_{j,l} + T_l T_{j,k}.$$

ou encore

$$T_1 11 = \frac{3}{2} T_1 T_1 1 - \frac{1}{2} T_1^3.$$

(iii) Le cas de $\mathfrak{sl}_3$

On commence par regarder dans le cas de deux matrices A_1,A_2 (on cherche les générateurs nécessaires pour les produits à au plus 6 facteurs en ces deux matrices).

Proposition V.6
Pour deux matrices, on dipose de l'ensemble de générateurs nécessaires :
- $T_{i,j}$ avec $i \leqslant j$;
- $T_{i,j,k}$ avec $i \leqslant j \leqslant k$;
- $T_{i,i,j,j}$ avec $i < j$;
- $T_{i,i,j,i,j,j}$ avec $i < j$.

◇ Remarque. Il y a des résultats qui étaient prévus. Par exemple, on sait, d'après l'étude menée en section I que seuls les T_{11} et T_{111} seront nécessaires parmi les produits avec une seule matrice. On pouvait également prédire que tous les produits à trois facteurs seraient nécessaires (car dans $\mathfrak{sl}_3$, il n'y a pas de traces d'une seule matrice : un terme de degré 3 ne peut donc s'obtenir par produit).

Voici quelques exemples de relations :

▷ Exemples.

- $T_{1112} = \frac{1}{2} T_{11} T_{12}$;
- $T_{1212} = \frac{1}{2} T_{11} T_{22} + T_{12}^2 - 2T_{1122}$;
- $T_{11112} = \frac{1}{3} T_{111} T_{12} + \frac{1}{2} T_{112} T_{11}$;
- $T_{111122} = \frac{1}{2} T_{11} T_{1122} + \frac{1}{3} T_{111} T_{122}$;
- $T_{112112} = T_{11} T_{1122} - \frac{1}{4} T_{11}^2 T_{22} + T_{112} T_{112} - \frac{2}{3} T_{111} T_{122}$.

Bibliographie

Jérôme Milot - encadré par Loïc Poulain d'Andecy

[1] J. E. HUMPHREYS. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer, University of Massachussets, 1972.

[2] J. DIXMIER. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars, Université Paris VI, 1974.

[3] C. PROCESI. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Mathematics*, 19 :306–381, 1976.

[4] B. E. SAGAN. *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions (second edition).* Springer, 2001.

[5] E. FORMANEK. The NAGATA-HIGMAN theorem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 21 :185–192, 1990.

[6] V. DRENSKY. Computing with matrix invariants. *Mathematica Balkanica*, 21, 2007.

[7] N. CRAMPÉ, J. GABORIAUD, L. POULAIN D'ANDECY, and L. VINET. *Racah algebras, the centraliser of $Z_n(\mathfrak{sl}_2)$ and its Hilbert-Poincaré series.* 2021.