1 Passage direct

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que f soit intégrable et de carré intégrable. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} (e^{i\frac{f(x)}{n}} - 1)\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer l'existence de I_n et déterminer sa limite.

b) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de I_n.

2 Préparation 20min

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$.

a) Cours : énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.

b) Montrer que

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$$

c) Montrer qu'au voisinage de l'origine, la fonction

$$F : \alpha \mapsto \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

admet en fait un développement limité à tout ordre, et en donner un à l'ordre 1.

3 Préparation 40min

a) Étudier pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$a_n = \int_0^1 \frac{nx\,\sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

b) Préciser, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, un équivalent de cette même suite.