1 Passage direct

1.1 Exercice 1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormé la base canonique, dont on note $\| \ \|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

1.2 Exercice 2

Montrer que $A \mapsto \det A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer ses dérivées partielles puis sa différentielle.

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer qu'en prenant (e_i) une b.o.n. de E, on a $\forall x \in E, f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, f(e_k)$. Qu'est ce que cela confère comme propriété sur f ? Comment appelle-t-on de telles applications ?

2.2 Exercice 2

a) Soit E un espace euclidien. En quels points l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est-elle différentiable ? Préciser en ces points le vecteur gradient.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \operatorname{tr}(M^3)$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3 Préparation 40min

Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $g(r, t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

a) Trouver une relation liant
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$
b) Montrer que $\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$
c) Conclure que φ est constante.
d) Interpréter ce résultat.
e) Complément : connaissez-vous des exemples (non polynomiaux) de fonctions telles que $\Delta f = 0$ partout sauf à l'origine en dimension 2 ? 3 ?

Remarque culturelle (totalement hors-programme) : cette propriété (absolument fondamentale) des fonctions harmoniques (encore valable en dimension supérieure) peut s'obtenir avec beaucoup moins de peine en réalité : on peut éviter le changement de coordonnées en n'écrivant que des intégrales surfaciques. Pour obtenir le résultat, il faut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral et appliquer le fameux théorème de Stokes, qui fera apparaître un laplacien intégré sur le disque au lieu d'un gradient sur le cercle.