1 Passage direct

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'application définie pour $f,g \in E$ par

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. Quelle est la norme associée ?
2. On pose $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1]\,, f(x) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$.
3. Déterminer $F + F^{\perp}$: qu'en déduit-on ?.
4. Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales.

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ non nul. On considère l'application $f : x \mapsto u \wedge x$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E. En déterminer image et noyau.
2. Déterminer son adjoint $f^{\star}$.
3. Montrer que f^2 est diagonalisable dans une base orthonormée.
4. Que dire d'une réciproque à la question 2 ?

3 Préparation 40min

Soit $K \in \mathcal{C}\left([0,1]^2, \mathbb{R}\right)$ non nulle telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, K(x,y) = K(y,x)$. On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f) : x \in [0,1] \to \int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. L'application Φ est-elle continue pour $\|\|_{\infty}$? pour $\|\|_1$?
3. Montrer que Φ est autoadjoint pour le produit scalaire associé à $\|\|_2$ sur E.
   Soit
   $$\Omega = \left[\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y\right]^{-1}$$
4. Montrer
   $$\forall \lambda \in \left]-\Omega, \Omega\right[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda \Phi(f)$$
5. Si $\lambda \in \mathbb{R}^{\star}$, montrer que :
   $$\dim \ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0,1]^2} K(x,y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$