1 Passage direct

1.1 Question de cours

Démontrer le lemme de Lebesgue sur les coefficients de Fourier.

1.2 Une inégalité à la Wirtinger

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est de moyenne nulle. Montrer

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser l'égalité.

2 Préparation 20min - Exponentielle apériodique

Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

b) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

c) En déduire enfin la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

d) Établissez un procédé permettant de calculer explicitement tous les $\sum 1/n^{2p}$. L'appliquer à $p = 2$.

3 Préparation 40min - Un contre-exemple constructif

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right)$$

a) Vérifier l'existence et la continuité de f.

b) Pour $\nu \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\left(\frac{(2\nu + 1)t}{2}\right) dt, \qquad \forall q \in \mathbb{N}, \quad s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$$

Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$, montrer que $s_{q,\nu} \geqslant 0$ et l'existence de $B > 0$ tel que $s_{\nu,\nu} > B\ln(\nu)$ pour tout $\nu > 0$.

c) Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0. Qu'en conclut-on ?