1 Passage direct

1.1 Exercice 1

Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant \pi\right\}$.

1.2 Exercice 2

Calculer $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ )\mathrm{d}x$ puis $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}x\ )\mathrm{d}y$. Qu'en déduisez-vous ?

1.3 Exercice 3

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

2.2 Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de $y'' + y = f$?

3 Préparation 40min

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. On pose $g = f' + f$. Donner une expression de f en fonction de g.
2. On suppose que g admet une limite nulle en $+\infty$. Montrer qu'il en est de même pour f.
3. Reprendre ces questions avec $h = f'' + f' + f$.
4. On se propose de généraliser cette propriété : on introduit l'opérateur de dérivation D sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ défini par $D(u) = u'$ et on considère $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant dont les racines sont à partie réelle strictement négative. Enfin on pose $\varphi = P(D)(f)$. Montrer que si φ tend vers 0 en $+\infty$ alors f aussi.
5. Si P est de degré n, montrer qu'une CNS pour que toute f de classe $\mathcal{C}^n$ vérifie
$$\lim_{x\to\infty} P(D)(f)(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
est que toutes les racines de P soient de partie réelle strictement négative.