

# 1 Passage direct

## 1.1 Exercice 1

Former une équation cartésienne de la surface de révolution  $\mathcal{S}$  obtenue par rotation du cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega(a, 0, 0)$  et de rayon  $r > 0$  du plan  $(xOy)$  autour de l'axe  $(Oy)$ .

## 1.2 Exercice 2

On considère la surface paramétrée par  $(u, v) \mapsto (uv, v, u^2)$ . L'esquisser partiellement. Pourquoi est-ce difficile de la représenter clairement? Montrer que la demi-droite  $(x = y = 0, z > 0)$  est une ligne de points doubles et que l'origine de l'espace est un point singulier. Montrer que pour  $v \neq 0$ , le vecteur  $N(u, v) = (-2\frac{u}{v}, 2\frac{u^2}{v}, 1)$  est normal à la surface et qu'il n'a pas de limite quand  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ . Avez-vous une interprétation géométrique?

A peu de chose près, cet surface s'appelle le parapluie de Whitney : pourquoi un tel nom à votre avis? (Pensez en bon cartésien!)

# 2 Préparation 20min

Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

- A quelle condition l'intersection de  $\mathcal{S}$  et du plan  $z = k$  contient-elle une droite? Écrire l'équation des droites en question.
- Déterminer les droites incluses dans  $\mathcal{S}$  non parallèles à  $(xOy)$ . (Les chercher en cartésien avec des paramètres  $x_0, a, y_0, b$ ).
- Montrer que celles-ci sont coplanaires.
- Déterminer le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en chacun des points d'intersection deux à deux de toutes les droites calculées.

# 3 Préparation 40min

## 3.1 Exercice 1

Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface  $\Sigma : z^3 = xy$  qui contiennent la droite d'équations :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3(z + 1) \end{cases}$$

## 3.2 Exercice 2

Donner la nature de la surface d'équation

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 14 = 0$$

et préciser ses éléments caractéristiques : éventuels centre, axe, rayon ...

*Remarque* : les coefficients peuvent devenir gros lors des calculs, mais tout se simplifie assez bien donc gardez espoir, et essayer de minimiser lesdits calculs.

Connaissez-vous des algorithmes qui font ces calculs de manière efficace (d'une part de manière générale, d'autre part dans le cadre de l'exercice)? Pouvez-vous quantifier leur efficacité?