1 Passage direct

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité d'un réel x_n vérifiant $e^{x_n} + x_n = n$. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n) ainsi définie.

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

On considère la suite définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.
2. Extension : reprendre l'étude avec $u_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(u_1) \geqslant 0$.

2.2 Exercice 2

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \arccos\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}}$$

3 Préparation 40min

3.1 Exercice 1

Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\text{dét}\,(C + X) = \text{dét}(X)$ pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $C = 0$.

3.2 Exercice 2 : des comatrices

1. Définir la notion de comatrice.
2. Dans la suite on notera com l'opération de prise de la comatrice. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Exprimer le rang de $\text{com}(A)$ en fonction du rang de A.
3. Calculer $\text{com}(\text{com}(A))$.
4. À part : résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$ l'équation $\text{com}(M) = M$.