# 1 Passage direct

Pour $n$ un entier naturel non nul on note $A_n$ l'ensemble des entiers entre $10^n$ et $10^{n+1}-1$ dont l'écriture décimale ne comprend pas le chiffre 5.

1. Déterminer le cardinal de $A_n$.
2. Étudier la série $\sum_{k \in A} \frac{1}{k}$ où $A$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont l'écriture décimale ne comprend pas le chiffre 5.
3. Est-ce que le résultat dépend du chiffre retiré ? Mettez ce résultat en relation avec la nature de la série harmonique.

# 2 Préparation 20min

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ le reste d'ordre $n$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 u_n = 1$ implique $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{R_n^2} = 1$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

# 3 Préparation 40min

On considère la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$z_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{p}\right)$$

1. Montrer que $(|z_n|)_n$ converge vers un réel $\rho > 0$.
2. Montrer que $(z_n)_n$ diverge.
3. *Complément* : montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(z_n)$ est le cercle centré à l'origine et de rayon $\rho$ tout entier.