1 Passage direct

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang $r \in [\![0, n]\!]$ est connexe par arcs.
3. *Complément* : reprendre ces questions pour des matrices à coefficients réels.

2 Préparation 20min - des théorèmes de point fixe

Un des théorèmes les plus fondamentaux de l'analyse est le suivant (théorème du point fixe de Banach) : si $X \subset E$ est une partie complète d'un $e.v.n$ et $f : X \to X$ est contractante, alors f admet un unique point fixe dans X. Il permet, par exemple, de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz, outil fondamental des équations différentielles. Le but de ces exercices est de diminuer les hypothèses sur f et de voir quelles propriétés sur l'espace permettent de rattraper un (unique ?) point fixe. Sachez cependant qu'en pratique ils ne s'utilisent pas vraiment et que ce sont plus des exercices intéressants qu'autre chose.

3 Exercice 1

1. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : K \mapsto K$ une fonction vérifiant

$$\forall x, y \in K, x \neq y \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|)$$

   Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que pour toute valeur de $u_0 \in K$ la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
3. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement K fermé ?

3.1 Exercice complémentaire

Soit C un compact convexe d'un evn E et $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.
Indication : on pourra utiliser la fonction $f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ avec $a \in C$.

4 Préparation 40min - à faire dans l'ordre que vous voulez

4.1 Exercice 1 - l'exercice intéressant

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue dont le graphe admet des asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$ (de la forme $y = ax + b$). Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4.2 Exercice 2 - l'exercice bien mais pas top

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n - 2$. $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?