1 Passage direct

1.1 Ex. 1 - Exponentielles et polynômes

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A, de degré $< n^2$. (En fait, de degré $< n$ mais pour l'instant il nous manque un outil pour obtenir cela).
2. Ce résultat subsiste-t-il dans une algèbre de Banach de dimension infinie ?

1.2 Ex. 2 - Généralisation d'une formule bien connue

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(Id_E + \frac{1}{n} f \right)^n = \exp f$$

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1 - De la convergence uniforme

1. Montrer que la suite de fonctions définie par $f_n : z \mapsto (1 + \frac{z}{n})^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers exp.
2. Soit (z_n) une suite de complexes de limite z. Montrer que $(1 + \frac{z_n}{n})^n \to e^z$.

2.2 Exercice 2 - Pas normale

Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n x}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais pas normalement.

3 Préparation 40min - Un calcul explicite d'exponentielle

1. Montrer l'égalité
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Soit $v = (a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'exponentielle de la matrice antisymétrique
$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
est la matrice de la rotation d'axe $e = v/\|v\|$, d'angle $\theta = \|v\|$. On pourra introduire l'endomorphisme $X \mapsto v \wedge X$.

3. Montrer la *formule de Rodrigues* :
$$\exp(\hat{v}) = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}\hat{v} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\hat{v}^2$$

4. *Une application de la question 1.* On admet le résultat suivant : pour tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien, il existe une base orthonormale telle que sa matrice y soit de la forme
$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \epsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \epsilon_s \end{pmatrix}$$
où les $R(\theta_i)$ sont des matrices de rotation 2×2 et les $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$.
Montrer alors que le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des exponentielles de matrices antisymétriques, et en déduire qu'il est connexe par arcs.