1 Passage direct

1.1 Exercice 1 - Propriétés basiques des groupes cycliques

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique.
2. Soit G un groupe cyclique de cardinal n.
   Montrer, que pour tout diviseur $d \in \mathbb{N}^\star$ de n, G possède un et un seul sous-groupe de cardinal d.

1.2 Exercice 2 - Groupe produit et groupes cycliques

Soit H et K deux groupes notés multiplicativement.

1. Montrer que si h est un élément d'ordre p de H et k un élément d'ordre q de K alors (h, k) est un élément d'ordre $\operatorname{ppcm}(p, q)$ de $H \times K$.
2. On suppose H et K cycliques. Montrer que le groupe produit $H \times K$ est cyclique si, et seulement si, les ordres de H et K sont premiers entre eux.

2 Préparation 20min - Un peu de manipulations dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

2.1 Exercice 1

1. Soit p un nombre premier. Calculer
$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x \text{ et } \sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^2$$
2. Soit p un nombre premier et k un entier naturel. Montrer que $\sum\limits_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$ est égal à 0 ou -1.

2.2 Exercice 2 - Le théorème de Wilson

Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! + 1 \equiv 0 \mod p$.

3 Préparation 40min

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose
$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Montrer
$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1, \ \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = nx \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = nx(1 + (n-1)x)$$
2. Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0, 1]$. On forme $A = \left\{k \in [\![0, n]\!] \ / \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right\}$ et $B = \left\{k \in [\![0, n]\!] \ / \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$
   Montrer que
$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$
   (On pourra s'intéresser à $n^2\alpha^2 \sum\limits_{k \in A} B_{n,k}(x)$).
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$
   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
4. Qu'a-t-on démontré ?