Généralisation du théorème de Rouché pour des fonctions à valeurs opérateurs

Simon Billouet [*], Laurent Dietrich [†]

29 avril 2010

Résumé

Le théorème de Rouché (1862) stipule que si f et g sont deux fonctions holomorphes définies sur un ouvert borné suffisamment régulier $D \subset \mathbb{C}$ tel que

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \text{ sur } \partial D,$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans D (comptés avec leurs multiplicités). Ce théorème s'étend aisément aux fonctions méromorphes en soustrayant le nombre de pôles (avec leurs multiplicités). Le but de ce travail consiste à généraliser ce théorème pour des fonctions méromorphes à valeurs opérateurs dans un espace de Banach. Pour ce faire, on aura besoin de prérequis d'analyse complexe en dimension infinie ainsi que d'analyse spectrale (opérateurs de Fredholm).

[*] http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/∼sbill404

[†] http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/∼ldiet783

Table des matières

1 Fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach

L'objectif de cette partie est de généraliser la notion d'holomorphie à des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

1.1 Définition, propriétés

Définition 1.1.1. *Soit E un espace de Banach et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. $f : U \to E$ est dite **holomorphe** si, pour tout $z_0 \in U$,*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

Dans ces conditions, on a immédiatement les équations de Cauchy-Riemann :

$$f'(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = i\frac{\partial f}{\partial y}(w).$$

Propriété 1.1.1. *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ deux ouverts, E et F des espaces de Banach, A une algèbre de Banach de groupe d'inversibles GA. On a immédiatement les propriétés suivantes :*
- *Toute fonction holomorphe sur U est continue.*
- *Si $f, g : U \to E, \alpha, \beta : U \to \mathbb{C}$ sont holomorphes, alors $\alpha f + \beta g : U \to E$ est holomorphe et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha' f + \alpha f' + \beta' g + \beta g'$.*
- *Si $f, g : U \to A$ sont holomorphes, alors fg est holomorphe et $(fg)' = f'g + fg'$.*
- *Si $f : U \to E$ et $T : U \to \mathcal{L}(E, F)$, alors $T.f$ est holomorphe et $(T.f)' = T'.f + T.f'$.*
- *Si $f : U \to GA$ est holomorphe, alors $f^{-1} : z \mapsto f(z)^{-1}$ est holomorphe, et $(f^{-1})' = -f^{-1}f'f^{-1}$.*
- *Si $\alpha : U \to V, f : V \to E$ sont holomorphes, $f \circ \alpha$ est holomorphe et $(f \circ \alpha)' = \alpha'(f' \circ \alpha)$.*

1.2 Deux théorèmes utiles

Dans les démonstrations des théorèmes qui suivent, on fera un usage fréquent de ce corollaire du théorème de Hahn-Banach :

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace de Banach et $x \in E$. Alors*

$$\|x\| = \underset{\Phi \in E', \|\Phi\| = 1}{sup} \|\Phi(x)\|$$

Théorème 1.2.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite injective qui converge vers un point $z_0 \in D$. Si f et g sont deux fonctions holomorphes de D dans un espace de Banach E telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(z_n) = g(z_n)$, alors $f = g$.*

Démonstration. Soit $\Phi \in E'$. D'après le théorème d'unicité dans le cas complexe, $\Phi \circ f = \Phi \circ g$. Donc, d'après la proposition 1.2.1 et la linéarité de Φ,

$$\|f(z) - g(z)\| = \underset{\Phi \in E', \|\Phi\| = 1}{sup} |\Phi(f(z) - g(z))| = 0.$$

Donc $f = g$. $\square$

Théorème 1.2.3. *(Principe du maximum). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné, E un espace de Banach et $f : \overline{D} \to E$ une fonction continue, holomorphe sur D. On a :*

$$\underset{z \in \overline{D}}{max} \|f(z)\| = \underset{z \in \partial D}{max} \|f(z)\|.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \overline{D}$. Pour tout $\Phi \in E'$, $\Phi \circ f$ est holomorphe. Donc, d'après le principe du maximum dans le cas scalaire,

$$|\Phi(f(z_0))| \leq \underset{z\in\partial D}{max}\|(\Phi \circ f)(z)\| \leq \|\Phi\| \underset{z\in\overline{D}}{max}\|f(z)\|.$$

D'après la proposition 1.2.1, on a donc :

$$|f(z_0)| \leq \underset{z\in\partial D}{max}\|f(z)\|$$

Ce qui termine la preuve.

□

On note que le principe fort du maximum (qui stipule qu'une fonction holomorphe admettant un maximum local est constante) n'est pas vrai en toute généralité. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer la fonction $f(z) = (z, 1)$ définie pour $|z| < 1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ muni de la norme $\|(z_1, z_2)\| = max\{|z_1|, |z_2|\}$. f n'est pas constante, mais admet un maximum local en tout point.

Le théorème suivant ne nous sera pas utile, mais nous le mentionnons à titre culturel :

Théorème 1.2.4. *(Principe fort du maximum). Si D est un ouvert connexe, H un espace de Hilbert et $f : D \to H$ une fonction holomorphe telle qu'il existe $z_0 \in D, \epsilon > 0$ tels que*

$$\|f(z_0) \geq \|f(z)\| \text{ sur } |z - z_0| \leq \epsilon.$$

Alors f est constante.

1.3 Intégrale sur un contour

Les définitions qui suivent peuvent paraître obscures. Elles sont faites pour formaliser la notion de régularité de frontière, afin qu'on puisse intégrer des fonctions sur des contours.

Définition 1.3.1. *(Contour de classe $\mathcal{C}^1$) Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est un* ***contour de classe $\mathcal{C}^1$ fermé*** *s'il existe $a < b$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ avec $\Gamma = \gamma([a, b])$ telle que :*

1. *$\gamma^{'}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$;*
2. *$\gamma(t) \neq \gamma(s)$ pour tout $a \leq t < s < b$;*
3. *$\gamma(b) = \gamma(a)$ et $\gamma^{'}(b) = \gamma^{'}(a)$.*

Définition 1.3.2. *(Contour de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est un* ***contour de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux fermé*** *s'il existe des nombres $a = t_1 < t_2 < ... < t_m = b$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ avec $\Gamma = \gamma([a, b])$ telle que :*

1. *Pour tout $1 \leq j \leq m - 1$, la fonction $\gamma_j := \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ et $\gamma_j^{'}(t) \neq 0$ pour $t_j \leq t \leq t_{j+1}$.*
2. *$\frac{\gamma_j^{'}(t_{j+1})}{\gamma_{j+1}^{'}(t_{j+1})} \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ [1] pour $1 \leq j \leq j - 2$.*
3. *$\gamma(t) \neq \gamma(s)$ pour $a \leq t < s < b$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $\frac{\gamma^{'}(a)}{\gamma^{'}(b)} \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.*

Plus bas, les figures 1, 2, 3 et 4 sont des exemples (ou contre-exemples) de tels contours.

On peut définir la relation d'équivalence sur les paramétrisations d'un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{C}$ suivante : deux paramétrisations $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma^* : [a*, b*] \to \mathbb{C}$ sont équivalents si la fonction $\gamma^{-1} \circ \gamma^*$, définie sur $[a*, b*[$, est strictement croissante. Cette relation sépare l'ensemble des paramétrisations en deux classes d'équivalence, et on dira dans la suite que Γ est **orienté** si l'une de ces deux classes est choisie. Dans ce cas, on dira qu'une paramétrisation est **positivement orientée** si elle appartient à la classe choisie.

1. Ceci veut dire qu'aux points singuliers, Γ forme un angle non nul.

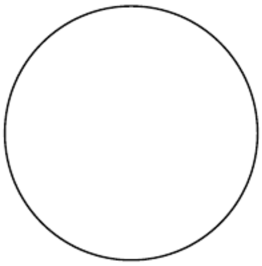

FIGURE 1 – Contour $\mathcal{C}^1$ fermé.

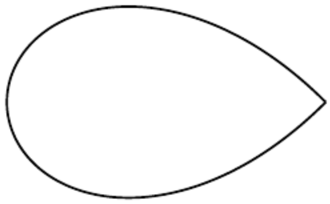

FIGURE 2 – Contour $\mathcal{C}^1$ fermé par morceaux (on note l'angle non nul à la jointure).

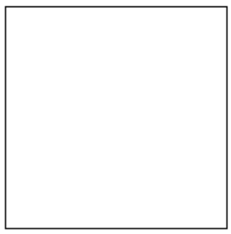

FIGURE 3 – Contour $\mathcal{C}^1$ fermé en quatre morceaux.

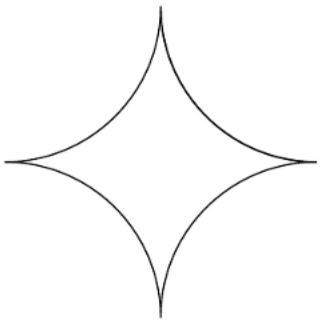

FIGURE 4 – **N'est pas** un contour $\mathcal{C}^1$ fermé à cause des angles nuls !

Définition 1.3.3. *(Intégrale d'une fonction continue sur un contour). Soit Γ un contour de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux fermé orienté, E un espace de Banach et $f : \Gamma \to E$ une fonction continue. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une paramétrisation positivement orientée de Γ. On définit alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

qui est indépendant du choix de γ d'après la règle de dérivation en chaîne.

Remarque : on peut intégrer des fonctions à valeurs dans un espace de Banach quelconque en utilisant l'*intégrale de Bochner*. Nous ne détaillons pas ici toutes ses propriétés (qui sont les mêmes que dans le cas de la dimension finie). On pourra consulter [2] (chapitre 5, pages 130–136).

1.4 Théorème et formule de Cauchy

Dans toute la suite, on dira qu'un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ est **régulier** si sa frontière est un contour de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'orientation choisie sur ∂D sera alors celle telle que D est sur la gauche quand on se déplace sur ∂D suivant cette orientation [2].

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Cauchy). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, E un espace de Banach et $f : \overline{D} \to E$ une fonction continue holomorphe sur D. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Pour $\Phi \in E'$, $\Phi \circ f$ est une fonction scalaire continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D. D'après le théorème de Cauchy dans le cas scalaire, on a donc

$$\Phi(\int_{\partial D} f(z)dz) = \int_{\partial D} \Phi(f(z))dz = 0.$$

D'après la proposition 1.2.1, cela implique que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

$\square$

Théorème 1.4.2. *(Formule de Cauchy). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, E un espace de Banach et $f : \overline{D} \to E$ une fonction continue holomorphe sur D. Alors*

$$\forall w \in D, f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Démonstration. Soit $w \in D$. Pour tout $\Phi \in E'$, on a :

$$\Phi(f(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\Phi(f(z))}{z - w} dz = \Phi(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w} dz).$$

On conclut en utilisant la proposition 1.2.1.

$\square$

2. On peut définir formellement ce fait : par exemple on dit que D est sur la gauche de ∂D si pour toute paramétrisation positivement orientée de ∂D $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, pour tout $a \leq t \leq b$ tel que $\gamma(t)$ est un point régulier de Γ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon i \gamma'(t) \in D$.

1.5 Séries entières, séries de Laurent

Le lemme qui suit est nécessaire pour prouver l'existence de séries entières pour les fonctions holomorphes et de séries de Laurent pour les futures fonctions méromorphes. Les preuves sont relativement techniques et nous ne les détaillons pas. On pourra se référer à [1] (chapitre 1).

Lemme 1.5.1. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contour fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté, E un espace de Banach, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \Gamma \to E$ une fonction continue. On pose*

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Alors F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et

$$F'(z) = n \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

De plus, $\lim\limits_{|z|\to\infty} \|F(z\| = 0$.

La formule de Cauchy nous donne alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.5.2. *Sous les mêmes conditions que dans le théorème 1.4.2, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz \text{ sur } D.$$

Théorème 1.5.3. *(Développement en série entière). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, E un espace de Banach et $f : D \to E$ une fonction holomorphe. Si $z_0 \in D$ et $r > 0$ est tel que le disque $|z - z_0| < r$ est contenu dans D, il existe une unique suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telle que*

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\zeta - z_0)^n f_n \text{ dans un voisinage de } z_0.$$

De plus, $f_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Théorème 1.5.4. *(Développement en série de Laurent). Soient $z_0 \in \mathbb{C}, 0 < r \leq R \leq +\infty$. Si f est une fonction définie et holomorphe sur $U\backslash\{z_0\}$, où U est un voisinage ouvert connexe de z_0, alors il existe une unique série de Laurent telle que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n f_n$$

sur un certain voisinage de z_0 dans U, et alors

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \text{ pour tout } r < \rho < R.$$

1.6 Singularités, méromorphie

Définition 1.6.1. *Sous les conditions du théorème 1.5.4, on dit que :*

1. *z_0 est une **singularité effaçable** si $f_n = 0$ pour $n < 0$. Si de plus $f_0 = 0$, z_0 est un **zéro** de f.*
2. *z_0 est un **pôle d'ordre** $ord(z_0) > 0$ si $f_n = 0$ pour tout $n < -ord(z_0)$ et $f_{ord(z_0)} \neq 0$.*
3. *z_0 est une **singularité essentielle** dans les autres cas.*

*Enfin, on note $res_{z_0}(f) := f_{-1}$ le **résidu** de f en z_0.*

Théorème 1.6.1. *(Théorème des résidus). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert régulier, $z_1, ..., z_n \in D$, E un espace de Banach et $f : D \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ une fonction holomorphe. On a alors :*

$$\sum_{j=1}^{n} res_{z_j}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z)dz.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ tel que les disques $|z - z_j| \leq \epsilon$ sont disjoints deux à deux et dans D. Le théorème de Cauchy 1.4.1 nous donne alors que

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{|z-z_j|=\epsilon} f(z)dz.$$

Par définition des résidus, on a bien l'égalité demandée. □

Définition 1.6.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et E un espace de Banach. f est une **fonction méromorphe** sur D s'il existe un ensemble fini $Z \subset D$ telle que f soit holomorphe sur $D \setminus Z$ et que les points de D soient des singularités effaçables ou des pôles de f.*

2 Théorème de Rouché

Cette deuxième partie est constituée de la généralisation annoncée du théorème de Rouché. On commence par quelques définitions et propriétés des opérateurs de Fredholm, qui sont le bon cadre de généralisation.

Dans toute cette partie, E désignera un espace de Banach.

2.1 Opérateurs de Fredholm

Définition 2.1.1. *On dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est un* ***opérateur de Fredholm*** *si $dimKer(T) < +\infty$ et $codimIm(T) < +\infty$. Sous ces conditions, on définit l'****indice*** *de T comme étant le nombre*

$$ind(T) = dimKer(T) - codimIm(T).$$

On aura besoin de la propriété suivante :

Propriété 2.1.1. *(Perturbation par un opérateur compact). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur de Fredholm et $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact. Alors $T + K$ est un opérateur de Fredholm et $ind(T + K) = ind(T)$.*

Pour prouver ce fait, on a besoin de quelques définitions et lemmes supplémentaires.

Définition 2.1.2. *On dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est un* ***opérateur semi-Fredholm*** *si $dimKer(T) < +\infty$ et $Im(T)$ est fermée. Son indice est alors $-\infty$ dans le cas où $codimIm(T) = +\infty$.*

Proposition 2.1.2. *(Caractérisation séquentielle des opérateurs semi-Fredholm). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents :*

1. *T est un opérateur semi-Fredholm.*
2. *Si (x_n) est une suite bornée de E telle que $T(x_n)$ est convergente, on peut extraire une sous-suite de (x_n) convergente.*

Démonstration. Supposons 2. On a donc que la boule unité de $Ker(T)$ est relativement compacte. D'après le théorème de Riesz, cela signifie que $Ker(T)$ est de dimension finie. Il possède donc un supplémentaire topologique E_0. On a alors l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall u \in E_0, \|u\| \leq C\|T(u)\|.$$

En effet, si cette dernière propriété était fausse, on pourrait trouver une suite $(u_n) \in E_0$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|T(u_n)\| \leq \frac{1}{n}$. Mais alors on pourrait extraire une sous-suite de (u_n) qui converge vers un certain $u \in E_0$ (car un supplémentaire topologique est fermé). Mais alors, par continuité, $T(u) = 0$ et $u \neq 0$ (car $\|u\| = 1$), ce qui est contradictoire.
D'après l'inégalité, $Im(T) = Im(T|_{E_0})$ est complète, donc fermée.

Réciproquement, supposons 1. verifiée. On a alors la même inégalité. Soit (u_n) une suite bornée de E telle que $T(x_n)$ est convergente. On décompose $u_n = v_n + w_n, v_n \in Ker(T), w_n \in E_0$. On a alors $T(u_n) = T(w_n)$ et, d'après l'inégalité, (w_n) est de Cauchy, donc convergente. (v_n) étant bornée dans un espace de dimension finie, elle admet une sous-suite convergente, ce qui finit la preuve. □

On a besoin d'admettre le lemme suivant, dont la preuve est difficile. On pourra la trouver dans [3].

Lemme 2.1.3. *L'ensemble des opérateurs de Fredholm (respectivement des opérateurs semi-Fredholm) est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et l'indice est constant sur chaque composante connexe de cet ensemble.*

On peut maintenant démontrer la propriété 2.1.1.

Preuve de la propriété 2.1.1. On commence par démontrer que $T + K$ est un opérateur semi-Fredholm. Soit (u_n) une suite bornée de E telle que $(T + K)(u_n)$ converge. Comme K est compact, il existe une sous suite (u_{n_p}) telle que $K(u_{n_p})$ converge, et donc $(T(u_{n_p}))$ converge. Comme T est de Fredholm, on peut extraire une sous-suite de (u_{np}), donc de (u_n), qui converge, ce qui montre d'après la proposition 2.1.2 que $T + K$ est de Fredholm.

Pour $t \in [0, 1]$, les opérateurs $T + tK$ dépendent continûment de t et sont semi-Fredholm (car tK est un opérateur compact). Donc, d'après le lemme 2.1.3, leur indice est constant. Ceci achève la preuve. □

2.2 Fonctions finiment méromorphes et de Fredholm

Définition 2.2.1. *Soit $w \in \mathbb{C}, U$ un voisinage de w et $A : U \setminus \{w\} \to \mathcal{L}(E)$ une fonction méromorphe en w. On dit que A est **finiment méromorphe** en w si son développement en série de Laurent*

$$A(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} (z - w)^n A_n$$

est tel que A_n est de rang fini si $n < 0$.

*Si de plus A_0 est un opérateur de Fredholm, on dit que A est **finiment méromorphe et de Fredholm en** w. L'**indice de A en** w est alors défini comme étant l'indice de A_0 en tant qu'opérateur de Fredholm.*

Le théorème suivant, qui est une sorte de réduction des fonctions d'indice 0, est d'une grande importance pour les démonstrations qui suivront. Sa preuve est technique et nous l'admettrons.

Théorème 2.2.1. *Soit $w \in \mathbb{C}, U$ un voisinage de w. Soit $A : W \setminus \{w\} \to \mathcal{L}(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm d'indice 0 en w. Alors il existe un voisinage $U \subset W$ de w, un projecteur de rang fini P, deux fonctions holomorphes $S, T : U \to GL(E)$ et une fonction holomorphe $A_P : U \setminus \{w\} \to \mathcal{L}(ImP)$ méromorphe en w tels que :*

$$S(z)A(z)T(z) = I - P + PA_P(z)P \text{ sur } U \setminus \{w\}.^3$$

Corollaire 2.2.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier et $Z \subset D$ un ensemble fini. Soit $A : D \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm sur Z. Alors A^{-1} est finiment méromorphe et de Fredholm en chaque point de Z.*

Démonstration. On commence par montrer que le fait que A soit à valeurs inversibles implique qu'elle est d'indice 0 en tout point w de Z. En effet, on peut écrire $A(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} (z - w)^n A_n$.

Posons alors $B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (z - w)^n A_n$. Ceci définit une fonction continue sur un certain voisinage de w. Quitte à réduire ce voisinage, on peut supposer $\|B(z)\| < 1$ (car $B(w) = 0$). $\sum_{n=m}^{0} (z - w)^n A_n$ est donc inversible dans ce voisinage, par série de Neumann (perturbation par un opérateur de norme < 1 d'un opérateur inversible). Or, ce dernier opérateur est de Fredholm d'après la propriété 2.1.1 (A_0 est de Fredholm et A_n est de rang fini dès que $n < 0$). Son indice est nul, car comme il est inversible, son noyau et son images sont triviaux. La propriété nous dit également que l'indice est le même que celui de A_0. On en déduit que $ind(A) = ind(A_0) = 0$.

On peut donc écrire la décomposition du théorème 2.2.1, et on en déduit que

3. On remarque que $PA_PP = A_PP$ puisque A_P arrive dans ImP, mais on utilise la première écriture par souci de symétrie.

$$A^{-1}(z) = T(z)(I - P + PA_P^{-1}(z)P)S(z)\,^4$$

Comme A_P peut être représentée par une matrice de fonctions méromorphes (ImP étant de dimension finie), A^{-1} est directement finiment méromorphe (le terme $T(I-P)S$ étant holomorphe). On peut écrire la série de Laurent pour $T(PA_p^{-1}P)S$, dont le coefficient d'ordre 0 est compact (car de rang fini, comme intégrale d'opérateurs de rangs finis). Par ailleurs, $T(w)(I-P)S(w)$ est de Fredholm car P est de rang fini (le noyau de $I-P$ est l'image de P et son image est le noyau de P). On en déduit que A^{-1} est un opérateur de Fredholm sur Z. D'après la propriété 2.1.1, A^{-1} est un opérateur de Fredholm. □

Dans la preuve de ce corollaire, on a prouvé un lemme qui nous sera en soi utile par la suite :

Lemme 2.2.3. *Soit $A : D \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm en tout point de Z. Alors l'indice de A est 0 en tout point de Z.*

La proposition suivante est surprenante : elle stipule que l'inversibilité en un point donne l'inversibilité en tout point sauf peut-être en un nombre fini.

Proposition 2.2.4. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $Z \subset D$ un ensemble fini. Soit $A : D \setminus Z \to \mathcal{L}(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm d'indice 0 en chaque point de Z. On suppose qu'il existe $z_0 \in D \setminus Z$ tel que $A(z_0)$ est inversible. Alors il existe un ensemble fini $Z' \supset Z$ tel que $A(z)$ est inversible pour $z \in D \setminus Z'$, et $A^{-1} : D \setminus Z' \to GL(E)$ est finiment méromorphe et de Fredholm en tout point de Z'.*

Démonstration. Soit D' l'ensemble des $w \in D$ possédant un voisinage U tel que $U \setminus \{w\} \subset D \setminus Z$ et que A est inversible sur $U \setminus \{w\}$. Montrons que $D' = D$.

$z_0 \in D'$ donc $D' \neq \emptyset$. De plus, D' est ouvert dans D par définition. Il reste à montrer, D étant connexe, que D' est fermé dans D. Soit $w \in \partial D'$. A est finiment méromorphe et Fredholm en w. D'après le théorème 2.2.1, on peut écrire, sur un voisinage $U \subset D \setminus Z$ de w :

$$A = S(I - P + PA_PP)T \text{ sur } U \setminus \{w\}.$$

$det(A_P)$ est méromorphe en w. On peut donc trouver un voisinage $V \subset U$ de w tel que $det(A_P) = 0$ sur $V \setminus \{w\}$, ou $det(A_P)(z) \neq 0$ pour tout $z \in V \setminus \{w\}$ [5]

Si $det(A_P) = 0$ sur $V \setminus \{w\}$, pour tout $z \in V \setminus \{w\}$, il existe $x \in Im(P), x \neq 0$ tel que $A_P(z).x = 0$. On pose $x = P(y)$ pour $y \in E, y \neq 0$. On a donc $(I-P).x = (I-P) \circ P.y = 0$. Posons $v = T^{-1}(z).x \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} A(z).v &= S(z)(I - P + PA_P(z)P)T(z)T^{-1}(z).x \\ &= S(z)((I-P).x + PA_P(z).x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc $A(z) \notin GL(E)$. Mais cela contredit l'appartenance de w à $\partial D'$. Ainsi, $det(A_P)(z) \neq 0$ pour tout $z \in V \setminus \{w\}$, et donc on peut inverser $A(z)$ pour $z \in V \setminus \{w\}$. Donc $w \in D'$. D' est donc fermé dans D, et ainsi $D = D'$.

Soit $Z' = \{w \in D, A(w) \notin GL(E)\} \supset Z$. Comme $D = D'$, cet ensemble est discret (tous ses points sont isolés). Il est fermé car c'est le complémentaire de $A^{-1}(GL(E))$ (au sens ensembliste) dans D, et $A^{-1}(GL(E)$ est ouvert car $GL(E)$ est ouvert et par continuité de A. Z' est donc un fermé discret dans un ouvert borné : il est donc fini, ce qui achève la preuve. □

4. Fonctionnellement, $AA^{-1} = S^{-1}(I - P + PA_PP)(I - P + PA_P^{-1}P)S = S^{-1}(I - P + PA_PPA_P^{-1}P)S$. Mais A_P^{-1} est à valeurs dans $Im(P)$, donc $AA^{-1} = S^{-1}(I - P + PA_PA_P^{-1}P)S = I$. L'autre calcul se déroule de la même manière.

5. En effet, si la deuxième proposition est fausse, on peut, dans chaque disque de centre w et de rayon $\frac{1}{n}$, trouver un point z_n où $det(Ap)(z_n) = 0$. D'après le théorème 1.2.2, $det(A_P) = 0$.

2.3 Notions de trace et d'indice

Pour définir l'indice, qui nous permettra d'énoncer le théorème de Rouché, on a besoin de généraliser la notion de trace dans des espaces vectoriels de dimension non nécessairement finie.

Définition 2.3.1. *Soit H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de H. Soit $A \in \mathcal{L}(F)$. On dit que $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H)$ est une* ***extension par zéro*** *de A si $\tilde{A}|_F = A$ et si A et $\tilde{A}$ ont même rang.*

Propriété 2.3.1. *Si $A \in \mathcal{L}(F)$, si $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H)$ est une extension par zéro de A, alors $tr(A) = tr(\tilde{A})$.*

Démonstration. Par égalité des rangs, on peut trouver une base $f_1, ..., f_n$ de H telle qu'il existe $m \leq n$ tel que $f_1, .., f_m$ soit une base de F et $f_{m+1}, ..., f_n \in Ker(\tilde{A})$. On a alors

$$\tilde{A} f_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} f_j \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

pour une certaine matrice $(a_{jk})_{j,k=1,...,n}$. Comme $f_{m+1}, ..., f_n \in Ker(\tilde{A})$, $a_{jk} = 0$ pour $k \geq m+1$. On a donc

$$tr(\tilde{A}) = \sum_{j=1}^{m} a_{jj}.$$

Puisque $A = \tilde{A}|_F$, on a aussi

$$A f_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} f_j \text{ pour } 1 \leq k \leq m$$

On en déduit l'égalité demandée.

$\square$

On se place maintenant dans le cadre d'un espace de Banach quelconque E. Soit A un opérateur de rang fini. On note S_A l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie qui contiennent ImA et qui admettent un supplémentaire sur lequel A est identiquement nulle. Si $F, G \in S_A$, on a $tr(A|_F) = tr(A|_G)$. En effet, soit $H \in S_A$ tel que $F \cup G \subset H$. $A|_H$ est une extension par zéro de $A|_F$ et de $A|_G$. Ainsi,

$$tr(A|_F) = tr(A|_H) = tr(A|_G).$$

La définition suivante est donc sensée :

Définition 2.3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur de rang fini. Soit $F \in S_A$. On définit*

$$tr(A) = tr(A|_F).$$

On remarque que pour deux opérateurs $A, B \in \mathcal{L}(E)$ dont l'un au moins est de rang fini, on a toujours

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Proposition 2.3.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini et $A, B : \overline{D} \setminus Z \to \mathcal{L}(E)$ deux fonctions finiment méromorphes sur Z. Alors les intégrales*

$$\int_{\partial D} A(z)B(z)dz \text{ et } \int_{\partial D} B(z)A(z)dz$$

sont de rangs finis, et

$$tr \int_{\partial D} A(z)B(z)dz = tr \int_{\partial D} B(z)A(z)dz.$$

Démonstration. Comme AB et BA sont finiment méromorphes sur Z, le théorème des résidus 1.6.1 implique que les intégrales considérées sont de rang fini. Pour prouver l'égalité des traces, on peut supposer, grâce à 1.6.1, que $Z = \{w\}$ et que D est un disque centré en w. On peut écrire les développements en série de Laurent de A et B sous la forme

$$A(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} (z-w)^n A_n,\ B(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} (z-w)^n B_n \text{ sur } \overline{D} \setminus \{w\}.$$

On a alors (toujours par 1.6.1)

$$\int_{\partial D} A(z)B(z)dz = 2\pi i \sum_{j=-m}^{m-1} A_j B_{-j-1}$$

et

$$\int_{\partial D} B(z)A(z)dz = 2\pi i \sum_{j=-m}^{m-1} B_j A_{-j-1}.$$

Par linéarité de la trace, on a donc

$$tr \int_{\partial D} A(z)B(z)dz = tr \int_{\partial D} B(z)A(z)dz.$$

□

Proposition 2.3.3. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini et $A : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et Fredholm sur Z. Alors les intégrales*

$$\int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz \text{ et } \int_{\partial D} A^{-1}(z)A'(z)dz$$

sont de rangs finis, et

$$tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz = tr \int_{\partial D} A^{-1}(z)A'(z)dz.$$

Démonstration. Comme A est finiment méromorphe et de Fredholm sur Z, A' est finiment méromorphe sur Z. Par le corollaire 2.2.2, A^{-1} est finiment méromorphe sur Z. Les deux opérateurs $A'A^{-1}$ et $A^{-1}A'$ sont finiment méromorphes sur Z [6], donc les intégrales considérées sont de rang fini.

Pour montrer l'égalité des traces, on peut, grâce au théorème des résidus 1.6.1, supposer que $Z = \{w\}$. Puisque A est inversible sur $D \setminus \{w\}$ et finiment méromorphe et de Fredholm en w, son indice en w est nul, d'après le lemme 2.2.3. D'après le théorème 2.2.1, on peut écrire

$$A(z) = S(z)(Q + PA_P(z)P)T(z) \text{ sur } U \setminus \{w\}.$$

6. Ils sont finiment méromorphes par produit de Cauchy, leurs coefficients d'ordres négatifs se calculent comme dans la propriété précédente et on obtient une somme de produits d'opérateurs dont toujours au moins l'un des deux est de rang fini.

Posons $B(z) = Q + PA_P(z)P$. B est inversible sur $U \setminus \{w\}$, et $B'B^{-1} = PA'_PA_P^{-1}P, B^{-1}B' = PA_P^{-1}A'_PP$.

On a $tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz = tr \int_{\partial D} B'(z)B^{-1}(z)dz$. En effet, pour prouver ce fait, il suffit de voir que si $C : U \to GL(E)$ est holomorphe, $tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz = tr \int_{\partial D} (AC)'(z)(AC)^{-1}(z)dz$. Mais $(AC)'(AC)^{-1} = A'A^{-1} + AC'C^{-1}A^{-1}$, donc

$$tr \int_{\partial D} (AC)'(z)(AC)^{-1}(z)dz = tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz + tr \int_{\partial_D} A(z)C'(z)C^{-1}(z)A^{-1}(z)dz.$$

D'après la proposition 2.3.2, $tr \int_{\partial D} A(z)C'(z)C^{-1}(z)A^{-1}(z)dz = tr \int_{\partial_D} C'(z)C^{-1}(z)dz = 0$ d'après le théorème 1.4.1, car C est holomorphe et inversible, donc C' et C^{-1} sont également holomorphes. La même égalité est valable avec un produit à gauche par un tel C, et cela prouve l'égalité annoncée.

On a donc

$$\begin{aligned} tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz &= tr \int_{\partial D} B'(z)B^{-1}(z)dz \\ &= \int_{\partial D} tr(PA'_P(z)A_P^{-1}(z)P)dz\,^7 \\ &= \int_{\partial D} tr(PA'_P(z)PPA_P^{-1}(z)P)dz\,^8 \\ &= \int_{\partial D} tr(PA_P^{-1}PPA'_P(z)P)dz \\ &= \int_{\partial D} tr(PA_P^{-1}(z)A'_P(z)P)dz \\ &= tr \int_{\partial D} A^{-1}(z)A'(z)dz. \end{aligned}$$

□

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini et $A : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm sur Z. D'après la proposition 2.3.3, la définition suivante est correcte :

Définition 2.3.3. $ind_{\partial D} A := \frac{1}{2\pi i} tr \int_{\partial D} A'(z)A^{-1}(z)dz = \frac{1}{2\pi i} tr \int_{\partial D} A^{-1}(z)A'(z)dz.$
*Le nombre $ind_{\partial D}A$ est appelé l'**indice de** A **selon le contour** ∂D.*

La proposition suivante justifie partiellement le nom d'indice :

Proposition 2.3.4. *(Additivité de l'indice). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini, et $A, B : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ deux fonctions finiment méromorphes et de Fredholm sur Z. Alors*

$$ind_{\partial D}(AB) = ind_{\partial D}A + ind_{\partial D}B.$$

Démonstration. En fait, on a déjà construit le schéma de la démonstration en montrant que l'indice était bien défini. On a $(AB)'(AB)^{-1} = A'A^{-1} + AB'B^{-1}A^{-1}$, donc

$$ind_{\partial D}(AB) = ind_{\partial D}A + \frac{1}{2\pi i} tr \int_{\partial D} A(z)B'(z)B^{-1}(z)A^{-1}(z)dz.$$

7. Par linéarité de la trace et de l'intégrale en dimension finie.
8. En effet, $PPA_PP = PA_PP = A_PP$.

Comme A, B et B' sont finiment méromorphes, ainsi que les fonctions A^{-1} et B^{-1} d'après le corollaire 2.2.2, la proposition 2.3.2 nous donne

$$\frac{1}{2\pi i} tr \int_{\partial D} A(z)B'(z)B^{-1}(z)A^{-1}(z)dz = \frac{1}{2\pi i} tr \int_{\partial D} B'(z)B^{-1}(z)dz = ind_{\partial D}B,$$

ce qui achève la démonstration.

□

2.4 Factorisation de Smith et conclusion

Afin de montrer que l'indice est un entier, on va avoir besoin de simplifier les matrices qui entrent en jeu ; pour cela, nous les réduirons sous forme de Smith. De plus, cette forme permettra aussi le calcul effectif de l'indice. On utilisera le théorème suivant, dont la preuve, technique, consiste en de l'algèbre de base. On la trouvera dans [1] (chapitre 5).

Théorème-définition 2.4.1. *(Factorisation de Smith). Soit $w \in \mathbb{C}$, W un voisinage de w et A une matrice $n \times m$ de fonctions méromorphes de W dans $\mathbb{C}$, non toutes nulles. Alors il existe $r \in [|1, min(n, m)|](r = rang(A))$, des entiers uniquement déterminés $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_r$, $w \in U \subset W$ et $E : U \to GL_n(\mathbb{C})$, $F : U \to GL_m(\mathbb{C})$ tels que*

$$EAF = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\Delta = diag((z - w)^{\kappa_1},...,(z - w)^{\kappa_r}).$$

Les entiers $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_r$ seront appelés les ***puissances de** A **en*** *z_0. La factorisation de Smith, et plus précisément ces entiers, sont très importants : ils permettent un calcul effectif de l'indice des fonctions, comme on va le voir dans la proposition suivante.*

Théorème 2.4.2. *(L'indice est un entier.) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini et $A : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm sur Z, alors $ind_{\partial D}A$ est un entier.*

Démonstration. À nouveau par le théorème des résidus 1.6.1 on peut supposer que $Z = \{w\}$ et que D est un disque centré en w. Comme A est à valeurs inversibles, le lemme 2.2.3 affirme que A est d'indice 0. Par le théorème de factorisation 2.2.1 il existe un voisinage U de w qu'on peut supposer être un disque, tel que

$$A(z) = S(z)(Q + PA_P(z)P)T(z) \text{ sur } U \setminus \{w\}.$$

À nouveau par 1.6.1, $ind_{\partial D}A = ind_{\partial U}A$. Comme S et T sont holomorphes elles sont d'indices nuls, et par additivité de l'indice 2.3.4 $ind_{\partial D}A = ind_{\partial U}(Q+PA_PP)$ et là encore le théorème des résidus ainsi que l'additivité donnent $ind_{\partial D}A = ind_{\partial U}A_P$ (Q étant constante ne rajoute pas de résidus, puis après additivité, P de même). Le membre de droite a bien du sens, car comme expliqué dans la preuve de 2.2.4, A_P est bien à valeurs inversibles.
On applique ensuite le théorème 2.4.1 à $A_P(z)$: il existe $r = rang(A_P) = dim(ImP)$, des entiers uniquement déterminés $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_r$, $w \in U \subset W$ et $E : U \to GL(ImP)$, $F : U \to GL(ImP)$ tels que

$$EA_P(z)F = \Delta(z)$$

avec

$$\Delta(z) = diag((z - w)^{\kappa_1},...,(z - w)^{\kappa_r}).$$

On a ensuite par linéarité de la trace et de l'intégrale en dimension finie

$$\begin{aligned} ind_{\partial U}\Delta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} tr(\Delta'\Delta^{-1})dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\sum_{j=1}^{r}\frac{\kappa_j}{z-w}dz \\ &= \sum_{j=1}^{r}\kappa_j \end{aligned}$$

Enfin, $ind_{\partial U}A_P = ind_{\partial U}\Delta$ car E et F sont holomorphes, soit au final

$$ind_{\partial D}A = \sum_{j=1}^{r}\kappa_j \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Avant de pouvoir conclure sur le théorème de Rouché, nous avoins besoin d'un dernier lemme.

Lemme 2.4.3. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini et $M : \overline{D} \setminus Z \to \mathcal{L}(E)$ une fonction finiment méromorphe en tout point de Z et telle que $\|M\| < 1$ sur ∂D. Alors $I + M$ est finiment méromorphe et de Fredholm d'indice 0 en tout point de Z. De plus, il existe $D \supset Z' \supset Z$ fini tel que $I + M(z)$ est inversible pour tout $z \in \overline{D} \setminus Z'$. De plus*

$$ind_{\partial D}(I + M) = 0.$$

Démonstration. Comme M est finiment méromorphe en tout point de Z, $I + M$ l'est également. Soit K la somme des parties principales (*i.e.* d'indice négatif) de M en tous les points de Z, et $A = I + M - K$ définie sur $\overline{D} \setminus Z$. A s'étend holomorphiquement à D.

Soit $\mathcal{F}^\infty(E)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(E)$ de l'idéal $\mathcal{F}(E)$ des opérateurs de rang fini de E (comme E n'est pas un espace de Hilbert, ce n'est pas nécessairement l'ensemble des opérateurs compacts !). On se place dans l'algèbre quotient $\widehat{\mathcal{L}}(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{F}^\infty(E)$, munie de la norme $\|\widehat{T}\| := \underset{K\in\mathcal{F}^\infty(E)}{inf} \|T + K\|$ [9]. On a $\widehat{K} = 0$, et d'après l'hypothèse,

$$\|\widehat{A}(z) - \widehat{I}\| = \|\widehat{M}(z)\| \leq \|M(z)\| < 1 \text{ sur } \partial D.$$

Le principe du maximum nous donne alors

$$\|\widehat{A}(z) - \widehat{I}\| < 1 \text{ sur } \overline{D}.$$

Donc $\widehat{A}(z)$ est inversible sur $\overline{D}$. On peut donc écrire $A(z) = J(z) + C(z)$ avec $J(z)$ inversible, donc de Fredholm d'indice 0, et $C(z) \in \mathcal{F}^\infty(E)$ donc compact. D'après la propriété 2.1.1, $A(z)$ est donc un opérateur de Fredholm de même indice que $J(z)$, donc d'indice 0. De la même manière, $I + M = A + K$ est finiment méromorphe et de Fredholm d'indice 0 en tout point de Z. $I + M(z)$ est inversible sur ∂D. Par continuité de $z \mapsto I + M(z)$, $I + M(z)$ est inversible pour un certain $z_0 \in D$, puisque $GL(E)$ est un ouvert. La proposition 2.2.4 nous assure alors l'existence d'un ensemble fini $Z' \supset Z$ tel que $I + M(z)$ est inversible sur $D \setminus Z'$. Comme $I + M(z)$ est inversible sur ∂D, $I + M(z)$ est inversible sur $\overline{D} \setminus Z'$.

Tout ce qu'on l'on vient de faire est valable pour $I + tM, 0 \leq t \leq 1$. La fonction $t \mapsto ind_{\partial D}(I + tM)$ est continue : en effet, la dérivation et l'inversion sont clairement continues ; l'intégration est continue car on intègre sur un compact ; la trace est continue car linéaire et définie pour des opérateurs de rangs finis. D'après le théorème 2.4.2, cette fonction ne prend que des valeurs entières et vaut 0 en $t = 0$. Donc $ind_{\partial D}(I + 1 \times M) = 0$. $\square$

9. Notons qu'on a toujours $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$ (il suffit de considérer $K = 0 \in \mathcal{F}^\infty(E)$).

Théorème 2.4.4. *(Théorème de Rouché). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné régulier, $Z \subset D$ un ensemble fini, $A : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe et de Fredholm en tous les points de Z et $S : \overline{D} \setminus Z \to GL(E)$ une fonction finiment méromorphe en tous les points de Z. Supposons qu'on a*

$$\|A^{-1}(z)S(z)\| < 1 \text{ sur } \partial D.$$

Alors $A + S$ est finiment méromorphe et de Fredholm en chaque point de Z, et

$$ind_{\partial D}(A + S) = ind_{\partial D}A.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.4.3, $I + A^{-1}S$ est finiment méromorphe et de Fredholm d'indice 0 en tout point de Z, il existe un ensemble fini $Z' \supset Z$ tel que $I + A^{-1}S(z)$ est inversible sur $\overline{D} \setminus Z'$, et enfin

$$ind_{\partial D}(I + A^{-1}S) = 0.$$

Puisque $A + S = A(I + A^{-1}S)$, d'après l'additivité de l'indice 2.3.4, on a

$$ind_{\partial D}(A + S) = ind_{\partial D}A + ind_{\partial D}(I + A^{-1}S) = ind_{\partial D}A.$$

□

3 Conclusion

Après avoir étudié les généralisations de fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, on a donc généralisé le théorème de Rouché à une certaine classe de fonctions méromorphes à valeurs opérateurs, les fonctions finiment méromorphes de Fredholm. Toutefois, nous n'avons pas montré ce que comptait réellement l'indice. Contrairement à la dimension finie, on ne peut pas dire que l'indice est égal au nombre de zéros diminué du nombre de pôles, comptés avec leur multiplicité : les points singuliers sont des opérateurs qui ne sont pas dans $GL(E)$, mais ils peuvent très bien ne pas être nuls. Pour aller plus loin, il faut introduire la notion de *valeur caractéristique* : pour une fonction holomorphe $A : U \setminus \{z_0\} \to \mathcal{L}(E)$, z_0 est une valeur caractéristique s'il existe une fonction holomorphe à valeurs vectorielles $\phi : U \to E$ telle que $\phi(z_0) \neq 0$ et $A(z)\phi(z)$ est holomorphe en z_0 et s'y annule. On peut alors généraliser la notion de multiplicité $m(z_0)$ pour une telle valeur z_0, et on a le résultat suivant (détaillé dans le chapitre 1 de [4]) :

$$ind_{\partial D}A = \sum_{z_0 \text{ valeur caractéristique}} m(z_0) - \sum_{z_0 \text{ pôle}} ord(z_0).$$

Ces résultats peuvent servir pour diverses applications, en particulier en théorie du signal (imagerie avec des ondes sonores), pour détecter la corrosion dans des matériaux : la dimension infinie a du sens car on a affaire à des équations d'ondes. On pourra consulter le chapitre 4 de [4] pour approfondir ce sujet.

Ce T.E.R. nous a permis de nous familiariser avec plusieurs notions : analyse en dimension infinie, analyse complexe généralisée, intégration de Bochner... À ce titre, il nous a été très profitable. Le travail principal était de comprendre puis de résumer le contenu des chapitres 1 et 4 de [1], travail difficile car les preuves du dernier ouvrage ne sont parfois pas complètes, ou manquent de clarté. Nous espérons que notre travail pallie ce problème initial. Nous remercions grandement Zied Ammari, qui nous a encadrés tout au long de ce T.E.R. et nous a permis de résoudre nombre de nos problèmes.

Références

[1] Israel Gohberg, Jürgen Leiterer. *Holomorphic Operator Functions of One Variable and Applications*. Birkhäuser, 2009

[2] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1980

[3] Pierre Lévy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, 2003

[4] Habib Ammari, Hyeonbae Kang, Hyundae Lee, *Layer Potential Techniques in Spectral Analysis*, American Mathematical Society, 2009.