Topologie différentielle et applications

Laurent Dietrich

4 septembre 2009

Table des matières

1 Préliminaires **3**
- 1.1 Variétés et applications lisses 3
- 1.2 Valeurs régulières, théorème de Sard 6
- 1.3 Variétés à bord 9
- 1.4 Application : théorème du point fixe de Brouwer 9

2 Orientation, degré d'une application lisse **10**
- 2.1 Degré modulo 2 10
- 2.2 Concept d'orientation 11
- 2.3 Degré de Brouwer – théorème de la boule chevelue 12

3 Champs de vecteurs **14**
- 3.1 Préliminaires 14
- 3.2 Théorème de Poincaré-Hopf 17
- 3.3 Application : théorème de la boule chevelue 17

4 Un peu d'algèbre : formes différentielles, cohomologie de De Rham **17**
- 4.1 Exemple d'un premier résultat : action libre d'un groupe d'automorphismes de S^{2n} sur S^{2n} 17
- 4.2 Algèbre extérieure 18
- 4.3 Formes différentielles sur une variété lisse 19
- 4.4 Intégration des formes - culture 21
- 4.5 Dérivation des formes 21
- 4.6 Cohomologie de De Rham 23

5 Conclusion **28**

Bibliographie **28**

Résumé

J'ai commencé à correspondre avec l'équipe d'algèbre et topologie de l'IRMA de Strasbourg début Février. Je souhaitais travailler sur de la topologie algébrique pour mon stage. Après quelques échanges, j'ai été accueilli par Pierre Guillot et Gaël Collinet, qui m'ont proposé dans un premier temps d'étudier des techniques cohomologiques élémentaires appliquées à l'étude des corps non-commutatifs. Une fois sur place, mes encadrants ont plutôt opté pour de la topologie différentielle : il y avait eu mésentente sur mon niveau d'études, et le sujet choisi à l'origine nécéssitait trop de connaissances de niveau M1 (théorie de Galois, corps p-adiques, lemme de Schur...).
J'ai alors commencé à travailler sur [1]. Je me suis interessé, en grosse partie, au concept de degré de Brouwer d'une application. Modulo quelques autres résultats, ce concept permet déjà beaucoup d'applications. On verra qu'avec quelques outils, la topologie différentielle permet de prouver assez simplement, entre autres : le théorème fondamental de l'algèbre, le théorème de point fixe de Brouwer, le théorème de la boule chevelue.
Ce dernier théorème s'obtient via un résultat très puissant qu'est le théorème d'Hopf-Poincaré : il relie le degré d'un champ de vecteurs sur une variété à sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Cette caractéristique a pris de nos jours tout un sens homologique. Ce sera un tremplin pour ce à quoi je vais m'intéresser dans un second temps, afin de revenir à mes volontés premières : faire un peu d'algèbre sur les variétés (ici lisses). On s'intéressera à l'algèbre extérieure et aux formes différentielles, afin de définir la cohomologie de De Rham. Pour cette partie, j'ai surtout travaillé avec [2] et [3].

1 Préliminaires

1.1 Variétés et applications lisses

Avant tout, posons le vocabulaire qu'on utilisera constamment par la suite. On travaillera toujours dans des espaces euclidiens.

Définition :
- pour $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ des ouverts, une application $f : U \to V$ sera dite *lisse* si elle est de classe C^∞.
- Nous allons avoir besoin de généraliser cette notion à des sous-ensembles arbitraires de l'espace euclidien : $f : X \subset \mathbb{R}^k \to Y \subset \mathbb{R}^l$ sera dite *lisse* si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $U \ni x \subset \mathbb{R}^k$ et une application lisse $F : U \to \mathbb{R}^l$ telle que F et f coincident sur $U \cap X$. Moralement, f est localement la restriction sur X d'une fonction lisse au sens précédent.
- Un *difféomorphisme* sera implicitement supposé lisse.

Alors que la topologie classique étudie les structures invariantes par homéomorphisme, la topologie différentielle s'intéresse aux invariants par difféomorphismes. Plus précisément, on travaillera sur des variétés lisses :

Définition : une partie $M \subset \mathbb{R}^k$ est *appelée variété lisse de dimension* m si tout $x \in M$ a un voisinage $W \cap M$ difféomorphe à un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ au sens où il existe un difféomorphisme $g : U \to W \cap M$ appelé *paramétrisation* de $W \cap M$. À l'inverse, un difféomorphisme de $W \cap M$ vers U est appelé *carte* de $W \cap M$.

Exemple : la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une variété lisse de dimension 2. (On paramétrise la région $z > 0$ par le difféomorphisme $(x, y) \in D(0, 1) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ et de même sur les autres régions).
Le concept de variété lisse est assez large, par exemple, le graphe de $x \neq 0 \mapsto sin(1/x)$ définit bien une variété lisse de dimension 1 !
À l'inverse, des objets courants comme le cube unité ne seront pas des variétés lisses (il y a des « coins »). En fait, la condition d'infinie dérivabilité sur nos objets peut paraître restrictive, mais on verra qu'on pourra souvent se ramener à des fonctions simplement continues. (Voir par exemple la preuve du théorème de Brouwer.)

On va vouloir, bien évidement, différentier des fonctions sur de tels objets. Il faut alors développer une théorie du calcul différentiel sur les variétés. Il s'agit, pour une variété lisse $M \subset \mathbb{R}^k$ de dimension m, de définir en tout x un sous-espace vectoriel $TM_x \subset R^k$ de dimension m (*l'espace tangent* à M en x). (Intuitivement, penser à S^2 et au plan tangent en un point, qui est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui approxime le mieux la sphère localement). Alors pour $f : M \to N$, df_x sera une application linéaire de TM_x vers $TN_{y=f(x)}$. (Intuitivement, l'application linéaire entre les espaces tangents qui approxime le mieux f localement.)

Passons aux définitions formelles. On prendra pour acquis ici le calcul différentiel de base sur des ouverts de l'espace euclidien. On rappelle le théorème d'inversion locale (ici dans le cadre euclidien et en version lisse, mais vrai pour des Banach quelconques et des fonctions de classe C^p, $p \geq 1$) :
Théorème : si $f : U \subset \mathbb{R}^k \to V \subset R^k$ (U et V ouverts) est lisse et que $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est inversible, alors il existe un ouvert $x \in U'$ telle que f restreinte à cet ouvert soit un difféomorphisme sur $f(U')$.

Désignons par $g : U \to M \subset \mathbb{R}^k$ une paramétrisation d'un voisinage $g(U)$ de x avec $g(u) = x$. On voit g comme une application de U vers $\mathbb{R}^k$ de sorte à la différentier classiquement. Alors :

Définition : l'espace tangent TM_x à M en x est l'image de dg_u

Il convient évidement de prouver que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie, et que cet objet est bien un espace vectoriel de dimension m. Si $h : V \to M$ désigne une autre paramétrisation locale en x avec $h(v) = x$, on remarque alors que $h^{-1} \circ g$ est un difféomorphisme qui envoie un ouvert $U_1 \ni x$ sur disons $V_1 \ni v$, si bien qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & V_1 \arrow[dl, "h"] \\ & \mathbb{R}^k & \end{tikzcd}$$

Soit, en prenant les différentielles :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[rr, "d(h^{-1}\circ g)_u", "\text{isomorphisme}"'] \arrow[dr, "dg_u"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "dh_v"] \\ & \mathbb{R}^k & \end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure sur l'égalité des images et justifie la définition.

Montrons maintenant que $dim(TM_x) = m$. Comme g^{-1} est lisse, prenons un ouvert $W \ni x$ et $F : W \to \mathbb{R}^m$ qui coincide avec g^{-1} sur $W \cap g(U)$. Posons $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, on a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "\text{inclusion}"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{R}^m \\ & W \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

qui implique

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[rr, "\text{identité}"] \arrow[dr, "dg_u"'] & & \mathbb{R}^m \\ & R^k \arrow[ur, "dF_x"'] & \end{tikzcd}$$

ce qui prouve que le rang de dg_u est m. $\square$

On peut maintenant définir la différentielle :
Définition : soit $f : M \subset \mathbb{R}^k \to N \subset \mathbb{R}^l$ avec $f(x) = y$. On définit $df_x : TM_x \to TN_y$ comme suit. Soit $F : W \to \mathbb{R}^l$ qui coincide avec f sur $W \cap M$, alors $df_x(v) = dF_x(v)$.

À nouveau il convient de prouver que le choix de F importe peu, et que $df_x(v) \in TN_y$. Considérons les paramétrisations $g : U \to M \subset \mathbb{R}^k$ et $h : V \to N \subset \mathbb{R}^l$ des voisinages respectifs de $x \in g(U)$ et $y \in h(V)$ avec $g(u) = x$ et $h(v) = y$. Quitte à réduire U on peut supposer $g(U) \subset W$ et que $f(g(U)) \subset h(V)$. Alors $h^{-1} \circ f \circ g : U \to V$ est bien définie en tant qu'application lisse, et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"'] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

qui donne lieu à

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "dF_x"] & \mathbb{R}^l \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

Ce diagramme montre que $dF_x(TM_x) = TN_y$. De plus, df_x ne dépend pas de F ; en effet, il suffit de parcourir le diagramme à l'envers, puisque dg_u est de rang maximal $m \geq k$, il a un inverse à gauche (qu'on notera abusivement dg_u^{-1}) et donc $df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ dg_u^{-1}$. □

Pour finir, on rappelle trois règles du calcul différentiel classique qui restent vraies ici et qu'on utilisera :
- la « chain rule » : si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont lisses avec $f(x) = y$ alors $g \circ f$ est lisse avec $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.
- la différentielle en x de l'identité de M est l'identité de TM_x. Plus généralement, si $M \subset N$ alors $TM_x \subset TN_x$.
- Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, alors $df_x : TM_x \to TN_y$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier les espaces tangents ont la même dimension.

1.2 Valeurs régulières, théorème de Sard

Définition : soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés de dimensions respectives m et n. On s'intéresse au cas $m \geq n$ ici (on verra plus tard pourquoi). On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal. Dans le cas $m = n$, cela revient à dire que df_x est un isomorphisme, et alors par le théorème d'inverson locale, f se comporte comme un difféomorphisme entre un ouvert contenant x et son image contenant $y = f(x)$.

Dans le cas $m > n$, cela revient à dire qu'elle est surjective.
Un point $y \in N$ est dit *valeur régulière* de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient que des points réguliers.
Remarque : dans le cas $m = n$ et si M est compacte et y une valeur régulière, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini car compact et discret. On peut alors parler de $\#f^{-1}(\{y\})$

Proposition : sous les mêmes hypothèses, $y \mapsto \#f^{-1}(\{y\})$ définit une fonction localement constante pour y parcourant les valeurs régulières de f. (C'est un ouvert, par le théorème d'inversion locale)

Explicitons et prouvons ceci. Ce résultat signifie que pour y valeur régulière, il existe un voisinage $V \ni y \subset N$ de valeur régulières tel que pour tout $y' \in V$, $\#f^{-1}(\{y'\}) = \#f^{-1}(\{y\})$. En effet, si $x_1, ..., x_k$ désignent les antécédants de y, par le théorème d'inversion locale on prend des voisinages ouverts disjoints deux à deux U_1,...,U_k de ces points respectifs, qui sont envoyés de façon difféomorphe sur disons $V_1, ..., V_k$. Alors $V = V_1 \cap ... \cap V_k \smallsetminus f(M \smallsetminus U_1 \smallsetminus ... \smallsetminus U_k)$ convient. $\square$

Comme application, on va donner une preuve du théorème fondamental de l'algèbre. L'idée va être de passer du plan complexe vu comme $\mathbb{R}^2$ à la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, variété compacte. Considérons les projections stéréographiques respecives du pôle nord N et du pôle sud S : $h_N : S^2 \smallsetminus N \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ et $h_S : S^2 \smallsetminus S \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Concrètement, h_N envoie x sur l'unique point du plan tel que N, x et ce point soient alignés. Ce sont clairement des bijections, et même des difféomorphismes (voir leurs expressions analytiques)
Soit maintenant un polynôme P sur le plan, on projette tout sur la sphère en construisant $f = h_N^{-1} \circ P \circ h_N$ sur $S^2 \smallsetminus N$, et $f(N) = N$. On va montrer que f est lisse, ce qui constitue la seule technicité de la preuve.

Le seul problème se situe en N, où l'on va vérifier le caractère lisse proprement. On pose $Q = h_S \circ f \circ h_S^{-1}$. Remarquons que $h_N \circ h_S^{-1}(z) = 1/\bar{z}$. En effet, tout se passe dans un même plan où on a la configuration suivante :

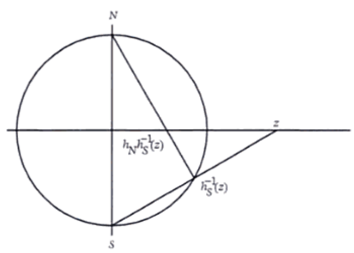

FIG. 1 – Projections stéréographiques

On remarque clairement (angles ayant des côtés perpendiculaires deux à deux) que les angles $(S, N, h_S^{-1}(z))$ et $(0, z, S)$ sont égaux. Donc les triangles $(0, z, S)$ et $(0, N, h_N \circ h_S^{-1}(z))$ ayant deux angles égaux, sont semblables. Ainsi $\frac{|h_N \circ h_S^{-1}(z)|}{1} = \frac{1}{|z|}$. Maintenant, comme 0, z et ce point sont alignés et dans le même quadrant, en écrivant $h_N \circ h_S^{-1}(z) = az$ avec $a > 0$ et en regardant les modules, on a bien le résultat.
Si on note $P = a_n z^n + ... + a_0$ avec $a_n \neq 0$, le calcul précédent donne rapidement que $Q(z) = \frac{z^n}{\bar{a_n} + ... + \bar{a_0} z^n}$ qui définit une fonction lisse au voisinage de 0, et ainsi $f = h_S^{-1} \circ Q \circ h_S$ l'est en N par composition.

Maintenant, comme $P' \neq 0$ n'a qu'un nombre fini de zéros, P est un difféomorphisme local partout sauf en un nombre fini de points. L'ensemble des valeurs régulières de f est donc une sphère privé d'un nombre fini de points, ce qui est connexe, et ainsi $\#f^{-1}(\{y\})$ qui définit une fonction localement constante, est finalement globalement constante. Comme ce n'est pas 0 partout, c'est 0 nulle part. Donc f est surjective, donc P aussi. En particulier, P a un zéro.

En général, on aimerait bien qu'une fonction lisse ait beaucoup de valeurs régulières. Un théorème, de Sard, permet d'évaluer cela. La preuve est assez longue et technique, et peut être consultée par exemple dans [§3][1] :

Théorème : soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ lisse définie sur U un ouvert de R^m et soit l'ensemble des points critiques de f, ie $C = \{x \in U | rang(df_x) < n\}$. Alors $f(C)$ a une mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.
Il s'en suit que l'ensemble des valeurs régulières de f est un ouvert dense de R^n.

En considérant une fonction lisse $f : M \to N$ entre des variétés de dimension respectives m et n, et en prenant la même définition de C, comme M se recouvre par un nombre dénombrable d'ouverts difféomorphes à des ouverts de R^n, on obtient le
Corollaire : l'ensemble des valeurs régulières de $f : M \to N$ est un ouvert dense de N.

Remarque : tout ceci n'a d'intérêt que pour $m \geq n$. Dans le cas $m < n$, $C = U$ et le théorème de Sard dit simplement que $f(U)$ est de mesure nulle. Passons maintenant à deux lemmes qui nous seront utiles :

Lemme : si $f : M \to N$ est une fonction lisse entre deux variétés lisses de dimensions respectives $m \geq n$ et $y \in N$ est une valeur régulière de f, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.
Preuve : Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$ l'idée est de choisir une application linéaire $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$ qui est inversible sur le sous-espace vectoriel $ker(df_x)$ et de considérer $F : M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}$ déifnie par $F(x) = (f(x), L(x))$. On constate que dF_x est inversible. Par le théorème d'inversion locale, on prouve que F procure une carte en x. (Avec les ouverts $U \ni x$ et $V \ni (y, L(x))$, F envoie $f^{-1}(\{y\}) \cap U$ de façon difféomorphe sur $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$ $\square$

Ce lemme permet d'obtenir des variétés. Par exemple, S^n l'est comme $f^{-1}(1)$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x_1^2 + ... + x_n^2$.

Lemme : si $M' = f^{-1}(\{y\})$ où y est régulière, alors $Ker(df_x) = TM'x$. Ainsi, df_x est un isomorphisme entre le supplémentaire orthogonal de $TM'x$ (qu'on appelle l'espace des vecteurs de M orthogonaux à M' en x) et TN_y.
Preuve : considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\text{inclusion}"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ \{y\} \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

aux différentielles, et compter les dimensions $\square$

1.3 Variétés à bord

On aimerait étendre le concept de variété à des objets où on ne peut pas nécéssairement entourer un point par un ouvert. Par exemple, le disque. Pour cela, notons $H^m = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m | x_m \geq 0\}$. Le *bord* ∂H^m est défini comme $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Définition : $X \subset \mathbb{R}^k$ est appelé *variété lisse à bord de dimension* m si chacun de ses points x a un voisinage $U \cap X$ difféomorphe à un ouvert $V \cap H^m$. L'ensemble des points correspondants à des points de ∂H^m forment le *bord* ∂X.
On peut montrer que ∂X est une variété lisse de dimension $m-1$ et que $X \setminus \partial X$ est une variété lisse de dimension m.
On définit TM_x exactement de la même façon que précédemment. Il reste donc un espace vectoriel de dimension m, en tout point.

Voici un lemme dans le même esprit que le lemme 1 (ainsi que la preuve, qui ne sera pas faite), qui permet de prouver par exemple que le disque unité D^n est une variété lisse à bord, de bord S^{n-1}.
Lemme : soit M une variété lisse sans bord, et $g : M \to \mathbb{R}$ telle que 0 soit une valeur régulière de g, alors l'ensemble des $x \in M$ vérifiant $g(x) \geq 0$ est une variété lisse à bord, de bord $g^{-1}(\{0\})$.

On a aussi
Lemme : soit $f : M \to N$ une fonction lisse entre M une variété à bord de dimension m, N de dimension n avec $m > n$. Si $y \in N$ est une valeur régulière de f et de sa restriction à ∂M, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse à bord de dimension $m - n$, de bord $f^{-1}(\{y\}) \cap \partial M$.

1.4 Application : théorème du point fixe de Brouwer

Toutes ces notions de bases étant énoncées, on va pouvoir démontrer le théorème du point fixe de Brouwer. On va résumer ici la preuve classique, que l'on peut voir en détails par exemple dans [§2][1].

Première étape : on montre que les seules variétés compactes de dimension 1 sont les unions disjointes finies de cercles et de segments.

Deuxième étape : soit X une variété compacte à bord. On montre qu'il n'existe pas de fonction lisse $f : X \to \partial X$ qui se comporte comme l'identité sur δX.
Cela se fait par l'absurde en considérant $y \in \partial X$ régulière (existe par Sard), alors $f^{-1}(\{y\})$ est une variété lisse de dimension 1, de bord $f^{-1}(\{y\}) \cap X = \{y\}$. Cela est impossible par la première étape, puisque le bord d'une variété lisse de dimension 1 consiste en un nombre pair de points.

Troisième étape : on conclut pour des applications lisses. En effet, si $f : D^n \to D^n$ est lisse et n'a pas de point fixe, on pose $F(x) \in S^{n-1}$ comme étant le point le plus proche de x sur la droite que forment x et $f(x)$. Alors F est lisse (cf. son expression analytique) et contredit la deuxième étape.

Dernière étape : on conclut pour les fonctions continues seulement, en se

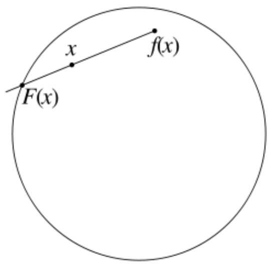

FIG. 2 – Troisième étape

ramenant à l'étape 3 en approchant uniformément la fonction continue par un polynôme, par le théorème de Weierstrass (généralisé). En effet, supposons que $G : D^n \to D^n$ soit continue et sans point fixe, alors $x \mapsto \|G(x) - x|\|$ admet un minimum $m > 0$ sur le compact D^n. On prend P tel que $\|P - G\| < m$, et on effectue $P := \frac{P}{1+m}$ de sorte que P aille de D^n dans D^n et vérifie $\|P - G\| < 2m$. Alors on a clairement $P(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$, ce qui est absurde car P est lisse. □

2 Orientation, degré d'une application lisse

Jusque là, nous n'avons vu aucun outil réllement performant (la preuve du théorème de Brouwer n'était pas très rapide et assez technique). Il est temps de s'intéresser à un concept fondamental de la topologie différentielle : le degré d'une application lisse. C'est un invariant topologique (par homotopie lisse) pour les fonctions entre des variétés lisses de même dimension qui va caractériser de telles fonctions.
Plus précisément, pour $f : M \to N$, avec M compacte et sans bord, on va montrer que $\#f^{-1}(\{y\})$ ne dépend pas du choix de la valeur régulière y (modulo 2), ni de f dans sa classe d'homotopie lisse.

2.1 Degré modulo 2

Définition : deux fonctions lisses $f, g : X \to Y$ (ensembles quelconques) sont dites *homotopes (de façon lisse)* (noté $\sim$) s'il existe une application lisse $F : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. (Moralement, on passe de f à g de façon lisse en le paramètre temps.) On montre que $\sim$ est une relation d'équivalence.
Deux difféomorphismes sont dits *isotopes* s'ils sont homotopes de façon lisse et que chaque $x \mapsto F(x, t)$ est un difféomorphisme.

Lemme : (invariance par homotopie)
Si $f, g : M \to N$ sont des fonctions lisses homotopes entre variétés lisses de même dimension, avec M compacte et sans bord, alors pour y une valeur régulière de f et g,

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#g^{-1}(\{y\}) \text{ (mod. 2)}$$

Preuve : Considérons $F : M \times [0,1] \to N$ une homotopie entre f et g. Si y est aussi une valeur régulière pour F, alors $F^{-1}(\{y\})$ est une variété de dimension 1, compacte et de bord $F^{-1}(\{y\}) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = f^{-1}(\{y\}) \times \{0\} \cup\ g^{-1}(\{y\}) \times \{1\}$. Le nombre de points dans ce bord est donc $\#f^{-1}(\{y\}) + \#g^{-1}(\{y\})$. On a déjà dit qu'une variété compacte de dimension 1 a un nombre de points pair dans son bord, d'où la parité de ce nombre, et le résultat demandé.
Dans le cas où y n'est pas une valeur régulière de f, on se ramène au cas précédent en utilisant le fait que $\#f^{-1}(\{y'\})$ définit une fonction localement constante de y'. On choisit un voisinage de y ou cette quantité est constante, de même pour g, puis dans l'intersection de ces voisinages on prend une valeur régulière de F (Sard) et on conclut. □

Définition : ce cardinal sera appelé *degré modulo 2* de f. Une telle appellation sous-entend que ce nombre ne dépend pas de la valeur régulière choisie. C'est en effet le cas. Pour montrer cela, on va avoir besoin du lemme suivant.

Lemme : soient y et z des points intérieurs d'une variété lisse connexe N. Alors il existe un difféomorphisme $h : N \to N$, homotope de façon lisse à l'identité, et qui envoie y sur z.
La preuve est un peu technique et fait appel aux équations différentielles et n'a pas vraiment sa place dans ce rapport. On peut la consulter dans [1][p.23]. On peut citer l'exemple simple de la sphère où un tel difféomorphisme est simplement une rotation. On peut maintenant annoncer le résultat d'invariance :

Théorème : soit M compacte et sans bord, N connexe et $f : M \to N$ lisse. Si y et z sont deux valeurs régulières de f, alors

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#f^{-1}(\{z\})$$

Preuve : via le lemme, soit h un difféomorphisme qui envoie y sur z. Alors z est une valeur régulière de h (car y l'est pour f). Puis comme $h \circ f$ est homotope à f (on exhibe simplement l'homotopie à partir de celle entre h et l'identité) on a $\#(h \circ f)^{-1}(\{z\}) = \#f^{-1}(\{z\})$ (mod. 2).
D'autre part, $(h \circ f)^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(\{y\})$, si bien qu'au final on a le résultat. □

Avant d'aller plus loin en affinant ce résultat, on peut donner un petit exemple à ce stade déjà. Il est évident (dans le cas d'une variété lisse compacte connexe et sans bord) qu'une fonction constante a un degré modulo 2 pair, et l'identité, un degré modulo 2 impair. Ainsi, l'identité n'est pas homotope à une fonction constante. Dans le cas particulier de S^n, ce résultat nie l'existence d'une application de $D^{n+1} \to S^n$ qui soit l'identité sur S^n. (Sinon, on aurait sur S^n une homotopie définie par $F(x,t) = f(t \times x)$ entre une constante et l'identité). C'est un résultat que l'on utilise (a utilisé) pour prouver le théorème de Brouwer.

2.2 Concept d'orientation

On peut aller encore beaucoup plus loin, et définir un degré pour une application lisse comme un entier tout court, et non plus modulo 2. Pour cela, on a besoin du concept d'orientation des variétés. On prendra ici pour acquis le concept d'orientation d'un espace vectoriel. Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 0, l'orientation est définie comme le choix d'un symbole $+1$ ou -1.

Définition : une variété lisse *orientée* M est une variété lisse pour laquelle on choisit une orientation de chaque espace tangent. Il faut en plus (sauf dimension 0) que cette orientation soit cohérente, c'est-à-dire qu'elle reste la même lorsqu'on se déplace sur la variété. De façon formelle, on peut ramener à cela à exiger que : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U et un difféomorphime h de U sur R^m ou H^m qui *préserve l'orientation.* (C'est-à-dire qu'en tout $y \in U$, dh_y envoie une base directe de l'espace tangent sur une base directe de R^m ou H^m).

Remarque : on remarque aisément à partir de cette nécéssité qu'une variété lisse connexe n'a que deux orientations possibles.

Dans le cas d'une variété à bord, en un point x du bord on peut distinguer trois sortes de vecteurs :

- Les vecteurs « tangents au bord », formant un hyperplan de TM_x noté $T\partial M_x$.
- Les vecteurs « sortants », formant un demi-espace ouvert délimité par $T\partial M_x$.
- Les vecteurs « rentrants », formant le demi espace complémentaire.

Une orientation pour la variété détermine une orientation pour son bord ainsi : pour $x \in \partial M$ on choisit une base positivement orientée dont tous les vecteurs sauf le premier (donc $m \geq 2$) sont tangents au bord, et le premier est sortant. Alors la base obtenue en ôtant ce premier vecteur détermine l'orientation positive de ∂M en x.
Dans le cas de la dimension 1, on assigne à chaque point x du bord le symbole (resp.) ∓ 1 selon si un vecteur orienté positivement en x est (resp.) rentrant ou sortant.
C'est de cette façon que plusieurs fois, on orientera la sphère S^{n-1} comme le bord du disque D^n.

2.3 Degré de Brouwer – théorème de la boule chevelue

Définition : soient M compacte et N connexe des variétés lisses de même dimension n sans bord et $f : M \to N$ une application lisse. Soit x un point régulier de f, ie df_x est un isomorphisme entre les espaces vectoriels orientés TM_x et $TN_{f(x)}$.
On définit le *signe de* df_x comme étant respectivement $+1$ ou -1 selon si df_x préserve ou inverse l'orientation. On définit maintenant le *degré de f en une valeur régulière y* :

$$deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} signe(df_x)$$

Tout comme le degré modulo 2, le degré est une fonction localement constante de y et est défini sur un ouvert dense de N. Et à nouveau, on a les :

Théorème : le degré de f ne dépend pas de la valeur régulière choisie.
Théorème : si g est homotope de façon lisse à f, alors elles ont le même degré.

La preuve est dans le même esprit que pour le degré modulo 2. Elle passe par un lemme qui dit que si M est le bord d'une variété compacte orientée X et est orientée en tant que telle, puis que si f s'étend à $F : X \to N$, alors $deg(f,y) = 0$ en toute valeur régulière. Ce lemme se prouve en étudiant $F^{-1}(\{y\})$ si y est valeur régulière pour F aussi, en orientant cette variété correctement. (C'est une union finie de cercles et de segments, et seuls les bords sont sur M. Ainsi sur chaque segment, les deux extrêmités s'annulent en degrés, donnant un total nul). Dans le cas où la valeur n'est pas régulière pour F, on procède comme dans le cas du degré modulo 2 via une valeur régulière trouvée par Sard et des voisinnages où le degré est constant.
On peut maintenant montrer l'égalité des degrés en une valeur régulière commune pour deux fonctions homotopes définies par $f(x) = F(0,x)$ et $g(x) = F(1,x)$ en orientant la variété compacte $[0,1] \times M$ comme un produit dont le bord est $\{0\} \times M$ orienté dans un sens, et $\{1\} \times M$ dans l'autre. Ainsi, le degré de F restreinte à ce bord en y vaut $deg(g,y) - deg(f,y)$, ce qui est nul par notre lemme précédent.
Pour l'indépendance de la valeur réglière choisie, c'est exactement comme dans le cas du degré modulo 2. □

Proposition : le degré d'une composition est le produit des degrés. Cette propriété qui se montre sans problème à la main nous sera fort utile plus tard par moments.

Avant de démontrer le théorème de la boule chevelue, donnons quelques exemples :
- La fonction de S^1 vers lui même définie par $z \mapsto z^k$ a un degré k.
- Une fonction constante est de degré nul.
- Un difféomorphisme est de degré ± 1 selon s'il préserve ou non l'orientation (ce qui prouve qu'un difféomorphisme qui ne préserve pas l'orientation ne peut pas être homotope à l'identité).
- En particulier, $-Id_{S^n}$ est de degré $(-1)^{n+1}$. (Cela peut se montrer formellement en voyant le fait que $-Id$ est la composée des $n+1$ réflexions qui inversent le signe d'une et une seule coordonnée et qui sont bien de degré -1)

En application et pour monter le pouvoir de cette notion de degré, on va démontrer le **théorème de la boule chevelue** :

S^n admet un champ de vecteurs tous non nuls si et seulement si n est impair.

Sur une variété $M \subset \mathbb{R}^k$, un champ de vecteurs est défini comme une application lisse $v : M \to \mathbb{R}^k$ avec $v(x) \in TM_x$ pour tout $x \in M$. Dans notre cas, cela équivaut simplement à $v(x).x = 0$. Si le champ est partout non nul, on peut aussi le supposer normalisé sans perdre de généralité, et ainsi voir v comme une fonction de S^n vers S^n. Regardons maintenant l'homotopie $F : [0,\pi] \times S^n \to S^n$ définie par $F(\theta,x) = x.cos(\theta) + v(x).sin(\theta)$. Un calcul rapide montre que tous ces vecteurs sont de norme 1. Par ailleurs, $F(0,x) = x$ et $F(\pi,x) = -x$. On a donc une homotopie entre l'identité et son opposé, ce qui, on l'a vu, est impossible pour n pair. Donc n est impair.
Réciproquement, si $n = 2k-1$, $v(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2k}, -x_{2k-1})$ définit un champ de vecteur bien défini et partout non nul. Il est intéressant de lire

un seul sens de ce théorème, et en contraposée : si n est pair, tout champ de vecteur de S^n s'annule au moins une fois. □

Remarque :

- Le degré de Brouwer n'est défini que quand M et N ont même dimension (ainsi que M compacte et N connexe). Il existe une théorie (le *cobordisme*) qui généralise la notion de degré de Brouwer à des fonctions partant d'une variété compacte sans bord quelconque, et allant vers une sphère de dimension quelconque. La théorie est un peu trop vaste pour être approfondie ici. On pourra cependant en avoir un aperçu dans [1][§7].
- On a prouvé que sur une sphère impaire, l'identité et son opposé son homotopes. En fait, Hopf a prouvé un théorème très puissant qui dit que deux fonctions d'une n-variété connexe vers S^n sont homotopes si et seulement si elles ont même degré ! (À nouveau, le *cobordisme* permet de prouver ce résultat, et même plus.)
- On ne l'a pas montré, mais il est évident (et rassurant !) que la notion de degré modulo 2 que l'on a vu avant correspond bien avec ce degré, évalué modulo 2.

3 Champs de vecteurs

3.1 Préliminaires

On va progressivement faire de l'algèbre. Avant cela, je tiens à retranscrire ici un résultat très puissant et important qui va justement servir de transition vers l'algèbre. Ce résultat est le théorème de Hopf-Poincaré, qui relie la notion de degré pour certaines fonctions bien précises sur une variété, à la caractéristique d'Euler de cette variété. C'est un résultat magnifique dans le sens où il lie une notion purement géométrique à une notion de topologie différentielle qu'est l'indice d'un champ de vecteurs :

Définition : considérons un champ de vecteurs $v : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (U ouvert) avec un zéro isolé en z_0. Alors $\frac{v}{\|v\|}$ envoie une sphère centrée en z_0 sur la sphère unité (les sphères étant orientées comme les bords des disques). Le degré de cette application s'appelle *l'indice* de v en z_0.
Afin d'étendre cette notion à des variétés quelconques au départ, on va prouver l'invariance de cette définition par difféomorphisme. Mais avant, quelques exemples :

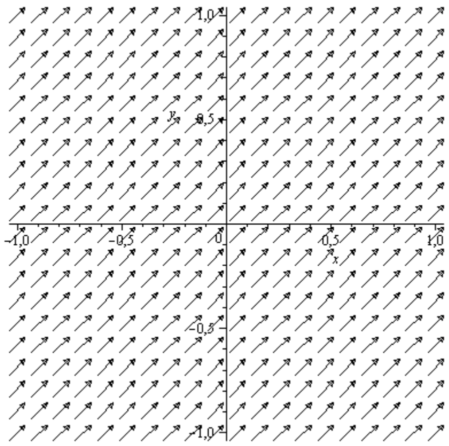

FIG. 3 – Indice 0

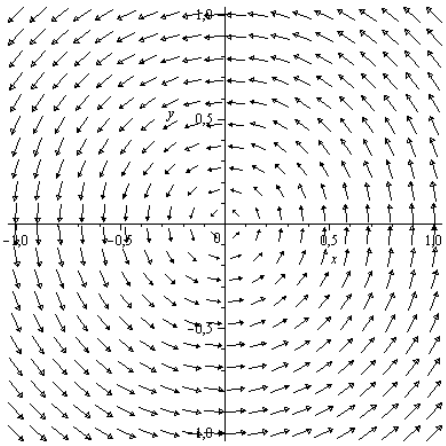

FIG. 4 – Indice 1

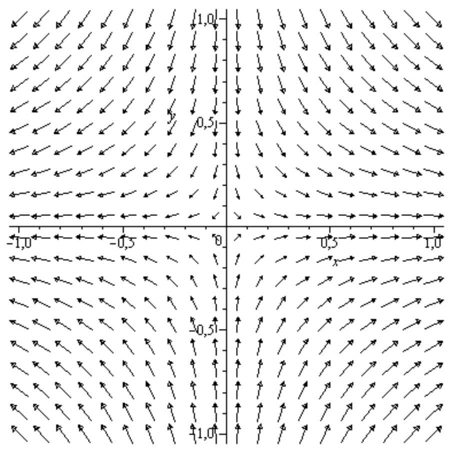

FIG. 5 – Indice -1

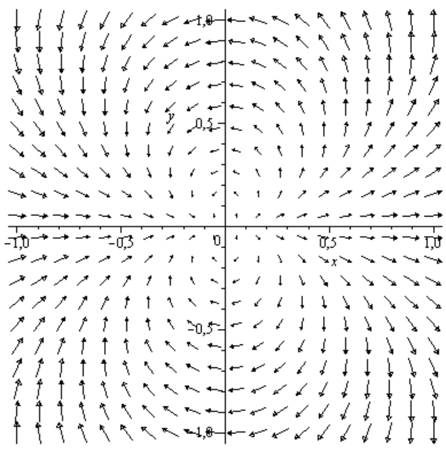

FIG. 6 – Indice 2

De façon générale, le polynôme $z \mapsto z^k$ définit un champ de vecteurs avec un indice k à l'origine, et en conjuguant, on obtient un indice $-k$. Pour vérifier ces exemples, voici une technique que j'ai élaborée et illustrée, permettant d'évaluer l'indice sans faire de calcul fastidieux. On part d'un point quelconque sur une sphère centrée en le zéro (en rouge sur la figure), et on tourne dans le sens direct. On regarde comment évolue la flèche désignant le vecteur associé : si elle tourne dans le sens direct, on compte $+1$. Sinon, on compte -1. On multiplie ensuite par le nombre d'antécédants sur la sphère pour les vecteurs (tous ceux qui sont valeurs régulières en ont le même nombre, 3 sur la figure, où ils sont encadrés de bleu. Dans le cas où certains vecteurs n'ont pas d'antécédants, l'indice est en fait 0). La continuité d'un champ de vecteurs fait que cette technique fonctionne généralement bien et est facile à appliquer.
On va maintenant étendre cette notion d'indice aux champs sur les variétés.

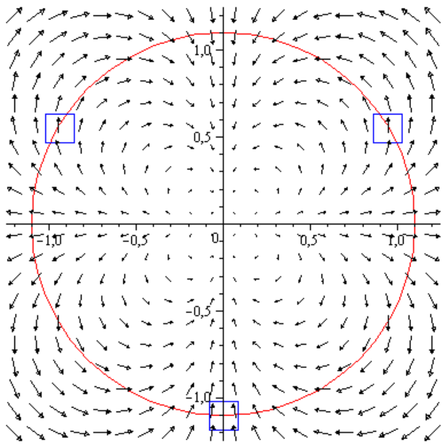

FIG. 7 – $z \mapsto z^3$

Définition : Soit $f : M \to N$ une fonction entre deux variétés M munie d'un champ v et N d'un champ v'. On dit que v et v' se correspondent sous f si $df_x(v(x)) = v'(f(x))$ pour tout $x \in M$. Si f est un difféomorphisme, cela définit clairement v' à partir de f : $v' = df \circ v \circ f^{-1}$.

Lemme : Si le champ v sur U correspond à $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ sur U' sous un difféomorphisme $f : U \to U'$ alors l'indice de v en un zéro isolé z et celui de v' en $f(z)$ sont égaux.
De cette façon on peut définir l'indice d'un champ en un zéro sur une variété : il suffit de se ramener au champ correspond sur l'ouvert de paramétrisation via le difféomorphisme associé.

Preuve : du lemme.
Montrons d'abord que *tout difféomorphisme de* $\mathbb{R}^m$ préservant l'orientation est isotope de façon lisse à l'identité. Quitte à ajouter une constante, on peut supposer $f(0) = 0$. On pose ensuite $F(x,t) = f(tx)/t$ pour $0 < t < 1$ et $F(x,0) = df_0(x)$, la différentiabilité de f étant un premier ingrédient dans le fait que F réalise une isotopie. Pour vérifier que F est toujours lisse même quand $t \to 0$, il faut écrire f sous la forme $f(x) = x_1.g_1(x) + ... + x_m.g_m(x)$ (c'est un exercice classique de calcul différentiel) où les g_i sont lisses et $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ Alors $F(x,t) = x_1.g_1(xt) + ... + x_m.g_m(xt)$ ce qui est clairement lisse.
On peut maintenant prouver notre lemme, dans le cas d'un difféomorphisme qui préserve l'orientation. On peut supposer sans perte de généralité que notre zéro est en $z = 0$ et que U est convexe. Aussi, supposons $f(z) = 0$ quitte à ajouter une constante à f. On procède comme avant et on construit donc une famille de difféomorphismes f_t avec $f_0 = Id$, $f_1 = f$, et $f_t(0) = 0$. On écrit ensuite $v_t = df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ le champ de vecteur sur $f_t(U)$. Tous ces champs sont bien définis et non nuls sur une sphère centrée en 0 suffisamment petite (le zéro est isolé). Par invariance du degré par homotopie, on conclut que $v_0 = v$ et $v_1 = v'$ ont même indice en 0.
Dans le cas des difféomorphismes qui inversent l'orientation, il suffit de montrer la validité du résultat pour une réflexion. Un calcul rapide et la multiplicativité

du degré assurent cela. □

3.2 Théorème de Poincaré-Hopf

Nous arrivons au résultat principal de la section : soit M une variété compacte et v un champ de vecteurs dont les zéros sont isolés. (Si M est à bord, il faut que $v(x)$ soit sortant en tout $x \in \partial M$).

Alors la somme des indices des zéros de v est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

En particulier, cela ne dépend pas du champ de vecteurs choisi.
Ce théorème est tout d'abord du à Poincaré en dimension 2 en 1885. Hopf le prouva en général en 1926, d'après des résultats d'Hadamard et de Brouwer. La preuve est trop longue pour figurer ici. Elle peut être consultée (en partie seulement !) dans [1][p.35 à 41]. L'idée est de passer par les variétés à bord et de d'abord montrer que cette somme correspond au degré d'une certaine fontion, la « fonction de Gauss », qui à chaque vecteur du bord associe le vecteur unitaire sortant et normal à la variété.

3.3 Application : théorème de la boule chevelue

Avec ce résultat, on peut prouver le théorème de la boule chevelue instantanément. En effet, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une sphère de dimension paire est de 2 : on somme donc sur un ensemble non vide, c'est-à-dire que le champ de vecteurs a au moins un zéro.

4 Un peu d'algèbre : formes différentielles, cohomologie de De Rham

4.1 Exemple d'un premier résultat : action libre d'un groupe d'automorphismes de S^{2n} sur S^{2n}

Avant de compliquer les choses par l'introduction de nouveaux concepts encore, on peut déjà faire un peu d'algèbre avec ce que l'on vient de voir. Je propose de résoudre le problème suivant :

Montrer qu'à isomorphisme près, le seul groupe d'automorphisme (pour la structure de variété lisse) de S^{2n} agissant librement sur S^{2n} est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve : On commence par montrer que toute application lisse de S^{2n} qui n'admet pas de point fixe est homotope à l'application antipodale $-Id$. En effet, l'homotopie est obtenue via $t.f(x) + (1-t).(-x)$. Le fait que f n'ait pas de point fixe assure que cette quantité ne s'annule pas (x et $f(x)$ étant de norme 1, l'annulation est possible ssi $t = 1/2$, ce qui revient à ce que f ait un point fixe). On peut donc normer cette quantité et on a bien l'homotopie souhaitée. Ainsi, comme l'action de notre groupe G est libre, pour tout $h \in G$, h est homotope à $-Id$. Soient h et g dans G. Alors le degré de $h \circ g$ est $-1 \times -1 = 1$, donc $h \circ g$ n'est pas homotope à l'application antipodale, et par conséquent a un point fixe. Mais la contrainte d'action libre implique donc que $h \circ g = Id$.

Ainsi, pour tous $h, g \in G$, $h \circ g = Id$. Par unicité de l'inverse dans un groupe, cela montre directement que G est le groupe à deux éléments. □

Remarque : tout cela est fait dans le cadre de la structure de variété lisse de la sphère, mais reste valable dans le cas uniquement continu. Je tenterai d'expliquer celà à la fin du rapport. D'un point de vue algébrique, cela découle du fait que les homologies de De Rham et singulières se correspodnent pour les variétés différentielles.

4.2 Algèbre extérieure

On a parlé il y a peu de caractéristique d'Euler-Poincaré. Cette notion a été introduite par Euler suite à une de ses découvertes intéressantes (Descartes y est pour quelque chose lui aussi) : pour un polyèdre convexe, lorsqu'on fait la somme alternée $S-A+F$ des sommets, arrêtes, et faces, on tombe toujours sur 2. De nos jours, grâce aux théories d'homologie et cohomologie singulière, cela s'explique très bien, en tant que somme alternée des dimensions d'une suite de groupes, qui sont des invariants associés à ces structures (c'est là tout le fondement de l'homologie). Cette théorie étudie les espaces topologiques en général et est plutôt longue à introduire. D'un autre côté, pour les espaces topologiques qui ont à la fois la structure de variété lisse, il existe une théorie dans le même style, due à de Rham : la cohomologie de De Rham. Les deux théories donnent les mêmes résultats (heureusement), mais cela s'obtient non sans peine, c'est le théorème de De Rham. Je vais dans cette partie essayer d'introduire cette théorie pour nous amener à mon résultat final qui est le calcul des groupes de cohomologie de la sphère et du tore à n trous.

Remarque : en fait, de façon encore plus générale, d'un point de vue théorie des catégories, il existe des théories de l'homologie pour toute catégorie.
La cohomologie de De Rham est basée sur le concept de *forme différentielle* sur une variété. On va introduire les quelques outils et notions nécessaires pour pouvoir en parler. Premièrement on va généraliser la notion d'espace dual d'un espace vectoriel réel V. Toutes les constructions que l'on verra ne sont pas intéressantes dans le cadre de ce rapport et ne seront donc pas prouvées.

Définition : un *p-tenseur* sur V est une fonction $T : V^p \to \mathbb{R}$ p-linéaire. Par exemple, une fonction linéaire est un 1-tenseur, le produit scalaire est un 2-tenseur, et le déterminant dans $\mathbb{R}^p$ est un p-tenseur.

Proposition : il est aisé constater que l'ensemble des p-tenseurs sur V est un espace vectoriel que l'on notera $J^p(V^*)$.

Définition : Si T est un p-tenseur et S un q-tenseur, alors on définit le p+q tenseur $T \otimes S$ par $T \otimes S(v_1, ..., v_{p+q}) = T(v_1, ..., v_p) \times S(v_{p+1}, ...v_{p+q})$. Le symbole $\otimes$ définit le produit tensoriel. Il n'est pas commutatif, mais associatif, et distributif par rapport à l'addition. C'est grâce à cette notion qu'on va étendre V^* :

Théorème : si $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ est une base de V^* alors

$$\left\{\phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}, 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq k\right\}$$

est une base de $J^p(V^*)$. Ainsi $dim J^p(V^*) = k^p$.

Définition : un p-tenseur est dit *alterné* si en échangeant de variable, on change le signe du résultat. Par convention, les 1-tenseurs sont alternés. On admet l'existence d'un opérateur Alt qui alterne un p-tenseur T :

$$Alt(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S^p} (-1)^\pi T^\pi$$

où $(-1)^\pi$ désigne la signature de π et $T^\pi(v_1, ..., v_p) = T(v_{\pi(1)}, ...v_{\pi(p)})$. Le coefficient $p!$ permet de s'assurer que si T est déjà alterné, alors $Alt(T) = T$.

Définition : Les p-tenseurs alternés forment manifestement un sous-espace vectoriel $\Lambda^p(V^*)$ de $J^p(V^*)$. Par contre, un produit tensoriel de tenseurs alternés ne reste pas nécessairement alterné. C'est pourquoi on définit plutôt un produit sur les tenseurs alternés par

$$T \wedge S = Alt(T \otimes S) \in \Lambda^{p+q}(V^*)$$

. Ce produit n'est pas commutatif mais est associatif et distributif par rapport à l'addition, et $T \wedge S \wedge R = Alt(T \otimes S \otimes R)$ (montrer l'associativité nécessite un peu de travail et un lemme qui dit que si $Alt(T) = 0$ alors $T \wedge S = S \wedge T = 0$).

Proposition : $\wedge$ est anticommutatif. (On le vérifie facilement dans le cas des 1-tenseurs). Ainsi, si l'on note $\phi_I = \phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p}$ avec $phi_{i_j} \in V*$ alors si deux suites d'indices I et J diffèrent seulement dans l'ordre des indices, les alternations successivent montrent que $\phi_I = \pm\phi_J$; de plus, s'il y a deux indices identiques dans une suite I, $\phi_I = 0$. On a donc le

Théorème : si $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ est une base de V^* alors

$$\left\{\phi_I = \phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p}, 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq k\right\}$$

est une base de $\Lambda^p(V^*)$. Ainsi $dim\Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p}$.

Corollaire : si $T \in \Lambda^p(V^*)$ et $S \in \Lambda^q(V^*)$ alors $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$.

Remarque : On a en particulier que $\Lambda^k(V^*) = 1$ où $k = dimV$. Ce résultat est bien connu sous une certaine forme : l'unicité à multiple scalaire près de la n-forme linéaire déterminant sur $\mathbb{R}^n$. Aussi, si $p > k$ les répétitions dans l'indiçage donnent clairement que $\Lambda^p(V^*) = \{0\}$. On pose aussi $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ que l'on voit comme les fonctions constantes sur V.

Définition : on note $\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus ... \oplus \Lambda^k(V^*)$ la somme directe extérieure de ces espaces vectoriels. Le produit extérieur $\wedge$ lui donne une structure d'algèbre non commutative graduée, de neutre $1 \in \Lambda^0(V^*) = 1$.

4.3 Formes différentielles sur une variété lisse

On va ici formaliser proprement le concept de forme différentielle que l'on croise souvent en physique, et sur de façon générale sur les variétés lisses.

Définition : soit X une variété lisse. Une p-forme sur X est une fonction w qui en tout $x \in X$ associe un p-tenseur $w(x) \in \Lambda^p(T_x(X))$.
On additionne les p-tenseurs point par point pour définir une addition sur les p-formes : $(w_1 + w_2)(x) = w_1(x) + w_2(x)$
De même avec le produit extérieur entre une p-forme et une q-forme pour donner une p+q forme : $(w \wedge \theta)(x) = w(x) \wedge \theta(x)$, où l'on récupère la propriété $w \wedge \theta = (-1)^{pq} w \wedge \theta$.
Les 0-formes sont les fonctions à valeus réelles.
La dérivation de fonctions lisses donne des 1-forme : si ϕ est une fonction lisse, alors $x \mapsto d\phi_x$ est une 1-forme que l'on note $d\phi$.

Proposition : voici la généralisation d'un théorème classique du calcul différentiel (on le connaît pour les 1-forme).
Toute p-forme sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^k$ peut-être écrite de façon unique comme une somme

$$\textstyle\sum_I f_I dx_I$$

où $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ et les x_i désignent les fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^k$.

Remarque : cela permet de donner un sens précis aux expressions du type $d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i$.

Définition : une propriété importante, et ici fondamentale, des formes est que ces dernières se transmettent via les fonctions lisses. Si $f : X \to Y$ est lisse entre deux variétés et w une p-forme sur Y, on peut définir une p-forme sur X de la façon suivante :

$$f^* w(x) := (df_x)^* w(f(x))$$

où pour un p-tenseur T et une application linéaire A,

$$A^* T(v_1, ..., v_p) := T(A(v_1), ..., A(v_p)).$$

Il faut bien se familiariser avec cette notion qui peut paraître un peu abstraite, mais comme son nom l'indique en anglais (« pullback ») consiste tout simplement à « tirer »la forme en arrière via la fonction f, de la façon la plus naturelle possible (en utilisant la différentielle de f dans les tenseurs, donc).

Proposition : quelques propriétés simples à montrer mais essentielles :
- Dans le cas des 0-formes, le pullback n'est que la composition : $f^* w = w \circ f$
- $f^*(w_1 + w_2) = f^* w_1 + f^* w_2$
- $f^*(w \wedge \theta) = f^* w \wedge f^* \theta$
- $(f \circ h)^*(w) = h^* f^* w$

Remarque : dans le cas des ouverts de l'espace euclidien, $f^* dx_i = df_i$ (le calculer). On sait maintenant le comportement du pullback sur les 0-formes et les 1-formes, ce qui permet de le savoir de façon générale (sur les ouverts de l'espace euclidien !), puisqu'une forme quelconque s'écrira $w = \sum_I a_I dx_I$ et donc $f^* w = \sum_I (a_I \circ f) df_I$.

Proposition : pour introduire le concept de cohomologie, il faut donner maintenant la propriété la plus importante du pullback, il commute avec la différentielle : soit $f : X \to Y$ lisse entre deux variétés et $\phi : Y \to Y$ une fonction lisse. Alors

$$f^*(d\phi) = d(f^*\phi).$$

Cela se montre facilement par calcul direct.
Aussi, on pourra utiliser un théorème dit « du déterminant »qui stipule que si f est un difféomorphisme entre des ouverts euclidiens alors $f^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_k)(y) = det(df_y)dy_1(y) \wedge ... \wedge dy_k(y)$.

4.4 Intégration des formes - culture

À quoi peuvent donc bien servir ces formes et cette notion de pullback ? En fait, les formes sont la bonne version de la notion de fonction quand on travaille sur des variétés, pour la simple et bonne raison que grâce au pullback, ces dernières peuvent être intégrées et dérivées, tout comme on le fait avec les notions de fonctions classiques dans le calcul différentiel standard (sur des ouverts de l'espace euclidien). On va surtout s'intéresser à la dérivation ici, mais l'intégration des formes est un concept très important et probablement une des raisons de l'invention de ces dernières. Avant tout, quelques mots sur cette théorie, sans prétention ni démonstation aucune, et sans se soucier des intégrabilités :
On définit tout simplement, pour $w = a \times dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$ une forme sur un ouvert euclidien,

$$\int_U w := \int_U a \; dx_1 ... dx_k.$$

L'intérêt de cette théorie, c'est que le pullback via un difféomorphisme permet directement le changement de variables. En effet, alors que dans le cas classique, on doit retenir la formule $\int_U a \; dx_1 ... dx_k = \int_V (a \circ f) \times |det f| \; dy_1 ... dy_k$ lourde et étrange (au sens où le Jacobien vient modifier le volume), dans notre cas on reconnaît simplement (à condition que f préserve l'orientation) l'écriture de

$$\int_U w = \int_V f^* w.$$

Si f inverse l'orientation, il y a un signe moins.

Remarque : tout cela vient de l'anticommutativité du produit extérieur, qui crée le même mécanisme que celui que l'on observe lorsqu'on échange les vecteurs dans le calcul de leur déterminant.

Cette propriété est essentielle, car c'est elle qui va permettre d'intégrer les formes sur des variétés à bord, tout simplement en se ramenant au cas euclidien via le pullback par les difféomorphismes de paramétrisation (et bien sûr en réglant les problèmes d'intégrabilité grâce à des outils de compacité). Mais revenons à nos moutons et passons à la dérivation.

4.5 Dérivation des formes

On sait dériver des 0-formes, c'est tout simplement la différentation des fonctions. On généralise tout simplement, dans le cas de l'espace euclidien : si $w = \sum a_I dx_I$ est une p-forme, on définit la p+1-forme *dérivée extérieure* de w $dw := \sum da_I \wedge dx_I$.

Proposition :

- Linéarité : $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$
- Loi du produit : $d(w \wedge \theta) = (dw) \wedge \theta + (-1)^p w \wedge d\theta$ si w est une p-forme.
- Cocyle (fondement de la cohomologie de De Rham) : $d(dw) = 0$.
- d est l'unique opérateur sur les formes vérifiant ces trois propriétés et coincidant avec la définition donnée sur les 0-formes.

Preuve : la linéarité est évidente. Les deux propriétés suivantes sont calculatoires. La troisième par exemple, se montre par pur calcul en utilisant d'une part le théorème de Schwartz, et les relations d'anticommutativité : tous les termes s'annulent deux à deux.
Pour l'unicité, on suppose l'existence d'un autre opérateur D convenant et on commence à montrer que $D(dx_I) = 0$ car $D(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = \sum_j \pm dx_{i_1} \wedge ... \wedge Ddx_{i_j} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, or $Ddx_{i_j} = DDx_{i_j} = 0$ car D et d coincident sur les fonctions. Maintenant, pour une p-forme $w = \sum a_I dx_I$, nos relations nous donnent $Dw = \sum_I (D(a_I) \wedge dx_I + a_I \wedge D(dx_I))$. Or, $D(dx_I) = 0$ et $D(a_I) = da_I$ d'où le résultat. □

Corollaire : soit $g : V \to U$ un difféomorphisme entre des ouverts de $\mathbb{R}^k$ ou H^k alors pour toute forme w sur U, $d(g^* w) = g^*(dw)$. C'est-à-dire que la commutativité de la différentielle avec le pullback qu'on avait vue avant pour les fonctions, est généralisée à la dérivée extérieure des formes.
Preuve : vérifier que $D = (g^{-1})^* \circ d \circ g^*$ est un opérateur qui satisfait aux trois premières propriétés. De plus, le fait que le corollaire soit déjà vu pour les fonctions prouve que D et d coincident sur ces dernières, et donc que $D = d$, ie $d \circ g^* = g^* \circ d$. □

Tout comme dans le cas de l'intégration, c'est le pullback qui va nous permettre de généraliser la dérivation extérieure aux variétés lisses quelconques, ie si $\phi : U \to X$ est une paramétrisation locale de X, on définit dw sur $\phi(U)$ par $dw := (\phi^{-1})^* d(\phi^* w)$. Si ψ est une autre paramétrisation, en posant $g = \psi^{-1} \circ \phi$ et en utilisant le corollaire, on prouve l'indépendance de cette notion en fonction du choix de paramètre. On définit ainsi point par point la dérivée extérieure d'une forme w sur une variété X. On ne va pas le montrer, mais on a encore les propriétés déjà vues, qu'on rappelle, avec le corollaire un peu amélioré :
Proposition :
- $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$
- $d(w \wedge \theta) = (dw) \wedge \theta + (-1)^p w \wedge d\theta$ si w est une p-forme.
- $d(dw) = 0$.
- si f est une fonction, df coincide avec la notion précédente.
- si $g : Y \to X$ est lisse entre deux variétés à bord, alors pour toute forme w sur X, $d(g^* w) = g^*(dw)$.

Preuve : seul le dernier point est nouveau. On l'a déjà vu dans le cas des 0-formes lors de la définition du pullback. Pour $w = df$, on vérifie clairement que cette relation est équivalente à $0 = 0$ et donc est vraie. De plus, la loi du produit montre que si la relation est valable pour deux formes, elle l'est pour leur produit extérieur. Puisque localement, toute forme s'écrit comme produit extérieur d'une 0-forme et de différentielles de 0-formes, on a le résultat. □

Remarque : il est intéressant de calculer explicitement les dérivées extérieures dans $\mathbb{R}^3$. En fait, on a les résultats suivants, qui font intervenir les opérateurs vectoriels classiques. Il peut être intéressant de relier la condition de cocycle aux relations entre ces opérateurs.

- si f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ alors
$$df = g_1dx_1 + g_2dx_2 + g_3dx_3$$
où $(g_1, g_2, g_3) = grad(f)$.

- si $w = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_2$ est une 1-forme, alors
$$df = g_1dx_2 \wedge dx_3 + g_2dx_3 \wedge dx_1 + g_3dx_1 \wedge dx_2$$
où $(g_1, g_2, g_3) = rot(f)$.

- si $w = f_1dx_2 \wedge dx_3 + f_2dx_3 \wedge dx_1 + f_3dx_1 \wedge dx_2$ alors
$$dw = div(f)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

- si w est une 3-forme, $dw = 0$.

4.6 Cohomologie de De Rham

La cohomologie est une technique d'étude de certaines structures qui est assez récente (les précurseurs qu'étaient Emmy Noether, Leopod Vietoris et Walther Mayer ont commencé à développer l'homologie vers 1920 ; la cohomologie arriva réellement 40 ans plus tard, se basant sur le concept d'espace dual). Elle consiste à observer l'obstruction qu'on certaines suites de morphismes à être « exactes », dans un sens qu'on verra plus tard, et permettent d'associer à ces structures de gros invariants, comme des groupes, ou même mieux comme ici, des espaces vectoriels tout entiers. Ici, nos espaces seront des quotients d'espaces de formes différentielles, et nos morphismes seront induits par l'opérateur d.

Définition : on dit qu'une p-forme différentielle w est *exacte* si il existe une p-forme θ telle que $w = d\theta$. On dit qu'elle est *fermée* si $dw = 0$. Il est clair ($d^2 = 0$) que les formes exactes sont fermées. Cependant, la réciproque est fausse, et c'est là tout le fondement de notre théorie. En fait, le problème de la réciproque est purement topologique, comme on en avait parlé plus tôt lors de l'introduction de la caractéristique d'Euler. C'est l'inexactitude de cette réciproque que l'on va tenter de mesurer.

Définition : On dit que deux p-formes fermées w et w' sont cohomologues si leur différence est exacte : $w - w' = d\theta$ et on note $w \sim w'$. Cela définit clairement une relation d'équivalence. L'ensemble quotient des p-formes par cette relation est noté $H^p(X)$ et s'appelle le p-ième groupe de cohomologie de De Rham de X. La structure de module étant conservée, cet ensemble quotient est encore tout un espace vectoriel.

Proposition : soit $f : X \to Y$ lisse entre deux variétés. Comme le pullback et la dérivation commutent, il est clair que f^* tire les formes exactes sur des formes exactes, et les fermées sur des fermées, si bien que si $w \sim w'$ alors $f^*w \sim f^*w'$ et donc f^* induit un morphisme $f^\# : H^p(Y) \to H^p(X)$.
On va voir maintenant une autre façon de définir ces notions, dans un cadre plus général de la théorie de l'homologie.

Définition : soit X une variété lisse de dimension n, on notera maintenant

$\Omega^p(X)$ l'ensemble des p-formes différentielles sur X. On dit qu'une suite

$$\Omega^0(X) \overset{d_0}{\to} \Omega^1(X) \overset{d_1}{\to} ... \overset{d_{n-1}}{\to} \Omega^n(X) \overset{d^n}{\to} 0$$

où les d_i représentent l'opérateur de dérivation extérieure pour les i-formes est exacte si pour tout i, $im(d_i) = ker(d_{i+1})$. Cela revient bien à dire (en remarquant que $ker(d_i)$ est l'ensemble des i-formes fermées et $im(d_i)$ celui des i-formes exactes) que les formes fermées sont exactes. On peut généraliser cette notion d'exactitude à des suites avec des espaces et des morphismes quelconques : il faut simplement que l'image du morphisme en i et le noyau du morphisme en $i+1$ soient identiques. Afin de calculer les groupes de cohomologie de la sphère, nous allons avoir besoin d'un théorème très utile qu'est le théorème de Mayer-Vietoris. Pour ceux qui connaissent un peu de topologie algébrique, c'est exactement le pendant du théorème de Van Kampen, version cohomologie. On va le voir, adapté à la cohomologie de De Rham, mais il existe de façon générale pour tout espace topologique et son homologie singulière associée. Ce théorème sert tout simplement à calculer les groupes de cohomologie d'une variété à partir de ceux d'un découpage, où ils sont plus simples à évaluer.

Théorème : de Mayer-Vietoris (1930 dans sa première forme, 1952 dans son expression actuelle d'exactitude de suite)
Soit X une variété lisse, réunion de deux ouverts (donc variétés lisses eux aussi) U et V : $X = U \cup V$. On note : $A^n = \Omega^n(X)$, $B^n = \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$, $C^n = \Omega^n(U \cap V)$. Alors la suite suivante est exacte :

$$... \overset{\delta_{n-1}}{\to} H^n(X) \overset{\alpha_n}{\to} H^n(U) \oplus H^n(V) \overset{\beta_n}{\to} H^n(U \cap V) \overset{\delta_n}{\to} H^{n+1}(X) \overset{\alpha_{n+1}}{\to} ...$$

où
- $\alpha(w) = (w_{|U}, w_{|V}) = (i^*w, j^*w)$ avec i, j les inclusions de U, V dans M
- $\beta(w, \theta) = w_{|U\cap V} - \theta_{|U\cap V} = k^*w - l^*w$ avec k, l les inclusions de $U \cap V$ dans (resp.) U et V.

Le coeur du théorème réside dans ces δ que l'on n'a pas défini. En fait, ce sont des fonctions qui s'obtiennent de façon constructive, via le « lemme du zigzag ».

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\partial_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & B_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "\partial'_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Lemme : Si l'on a le diagramme commutatif ci-dessus, où les lignes forment des suites exactes (et ∂ représente la dérivation extérieure) alors on a l'existence de morphismes $\delta_n : H^n(U \cap V) \to H^{n+1}(X)$ qui rendent la suite de Mayer-Vietoris exacte.
Preuve : On construit les δ_n classiquement : soit $c \in C_n$ un représentant d'une classe de $H^n(U \cap V)$, c est donc fermée et $\partial_n^{''}(c) = 0$. L'exactitude en C_n implique que β_n est surjective. Soit donc $b \in B_n$ tel que $\beta_n(b) = c$. Par commutativité du diagramme, $\beta_{n+1}\partial'_n(b) = \partial''_n\beta_n(b) = \partial''_n(c) = 0$. Donc $\partial'_n(b) \in \ker \beta_{n+1} = \mathrm{im}\alpha_{n+1}$ (par exactitude). L'exactitude en A_{n+1} donne l'injectivité de α_{n+1} et donc l'unicité du $a \in A_{n+1}$ tel que $\alpha_{n+1}(a) = \partial'_n(b)$. Puis $\alpha_{n+2}\partial_{n+1}(a) = \partial'_{n+1}\alpha_{n+1}(a) = \partial'_{n+1}\partial'_n(b) = 0$ (condition de cocyle). Donc $\partial_{n+1}(a) \in \ker \alpha_{n+2} = \{0\}$ (exactitude). Donc a est fermée et représente donc une classe dans $H^{n+1}(A)$. On vérifie, par la même sorte de travail, qu'en posant $\delta_n(c) = a$ qu'on définit bien les δ (ie. qu'on a une indépendance en fonction du représentant de classe choisi) et que la suite est exacte. □

Preuve : du théorème
Il ne reste qu'à montrer qu'on a bien un tel diagramme commutatif. La commutativité du diagramme est simplement le fait que le pullback et la dérivation commutent. Vérifier l'exactitude des lignes dans ce diagramme revient à vérifier que les α sont injectives, que $Im\alpha = Ker\beta$ et que les β surjectives.
Si $\alpha(w) = 0$, alors $w_{|U} = w_{|V} = 0$ donc $w = 0$, donc α est bien injective.
Pour la deuxième étape, on a $\beta(\alpha(w)) = \beta(w_{|U}, w_{|V}) = w_{|U\cap V} - w_{|U\cap V} = 0$, d'où $Im\alpha \subset Ker\beta$. Puis soit $(w, \theta) \in Ker\beta$, ie $w_{|U\cap V} = \theta_{|U\cap V}$. On pose alors $\zeta(x) = w(x)$ si $x \in U$ et $\zeta(x) = \theta(x)$ si $x \in V$, ce qui définit bien une forme sur tout X (la définition coincide sur l'intersection). De plus on a $(w, \theta) = \alpha(\zeta)$ d'où l'autre inclusion et l'égalité. La dernière étape est beaucoup plus compliquée et ne sera pas traitée ici, elle nécessite la notion de *partition de l'unité*. On pourra consulter une preuve dans [3][p.403][p.49]. □

On peut maintenant calculer les groupes de la sphère. On va écrire $S^n = U \cup V$ où U est la sphère privée du pôle nord, V la sphère privée du pôle sud. Avant tout :
Théorème : fondamental
Les espaces de cohomologies sont des invariants topologiques, et même par homotopie. C'est-à-dire, si deux variétés sont homotopes (au sens de la topologie algébrique) alors elles ont même espaces de cohomologie.

Preuve : trop longue pour figurer ici, et fait appel à la théorie de l'intégration sur les variétés, dont on a tout juste parlé. On peut néanmoins en dire quelques mots. Déjà, ce résultat est impressionant, car a priori la cohomologie de De Rham est quelque chose de tout à fait propre à la topologie différentielle. Or ici, on apprend que deux variétés lisses tout simplement homotopes au sens de la topologie algébrique partagent les mêmes invariants. Tout cela rentre dans le cadre du théorème de De Rham dont on a déjà parlé, qui dit que l'homologie singulière et de De Rham se correspondent sur ces variétés.

Calcul des espaces de la sphère : par projection stéréographique, on a que U et V sont homotopes à $\mathbb{R}^n$. Puis $U \cap V$ est la sphère à deux trous, ce qui est clairement homotope à S^{n-1}.

Lemme :
-Si X est simplement connexe, $H^1(X) = \{0\}$. En effet, X est homéotope à $\mathbb{R}^n$, qui est un ouvert étoilé, et le *lemme de Poincaré* assure alors que les formes fermées y sont exactes.
-$H^0(X)$ est de dimension d le nombre de composantes connexes de X. En effet, comme il n'y a pas de -1 forme, il n'y a pas de 0-forme exacte. Puis les 0 formes fermées sont manifestement les fonctions constantes. Ainsi $H^0(X)$ n'est autre que l'ensemble des fonctions réelles constantes sur X, ce qui est manifestement isomorphe à $\mathbb{R}^d$.
-Si X est de dimension 0 et compacte, $dim(H^0(X))$ est égale au nombre de points de X. En effet, cela revient simplement à définir une fonction en chacun de ces points.

On applique maintenant le théorème de Mayer-Vietoris, on obtient l'exactitude de la suite suivante :

$$... \overset{\delta_{n-1}}{\to} H^p(S^n) \overset{\alpha_n}{\to} H^p(\mathbb{R}^n) \oplus H^p(\mathbb{R}^n) \overset{\beta_n}{\to} H^p(S^{n-1}) \overset{\delta_n}{\to} H^{p+1}(S^n) \overset{\alpha_{n+1}}{\to} ...$$

Ce qui s'écrit pour $p > 0$,

$$... \overset{\delta_{n-1}}{\to} H^p(S^n) \overset{\alpha_n}{\to} \{0\} \overset{\beta_n}{\to} H^p(S^{n-1}) \overset{\delta_n}{\to} H^{p+1}(S^n) \overset{\alpha_{n+1}}{\to} \{0\} \to ...$$

L'exactitude du morceau $\{0\} \overset{\beta_n}{\to} H^p(S^{n-1}) \overset{\delta_n}{\to} H^{p+1}(S^n) \overset{\alpha_{n+1}}{\to} \{0\}$ donne clairement que $Im\delta_n = H^{p+1}(S^n)$ et $Ker\delta_n = \{0\}$, donc δ_n est un isomorphisme et on a

$$\text{Pour } n > 1 \text{ et } p > 0,\ H^p(S^{n-1}) \cong H^{p+1}(S^n).$$

Comme d'habitude en topologie, les petites dimensions posent problème. On va donc étudier le cas particulier entre S^0 et S^1. Le problème est qu'ici, $U \cap V$ est homotope à $\{-1\} \oplus \{+1\}$ qui est de dimension 0 et non connexe. Grâce au lemme (S^1 est connexe, S^0 a deux composantes connexes, et $H^1(\mathbb{R}) = 0$) on a donc l'exactitude de :

$$H^0(S^1) = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to H^0(S^0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to H^1(S^1) \to \{0\}$$

En appliquant successivement les exactitudes et le théorème du rang, on obtient $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$. Ceci plus note précédent résultat nous permet de conclure :

Pour $n \geq 1$, $H^0(S^n) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$
Pour $0 < m < n$, $H^m(S^n) \cong ... \cong H^1(S^{n-m+1}) \cong \{0\}$
Pour $m > n$, $H^m(S^n) \cong \{0\}$ (il n'y a pas de m-formes.)

Le théorème de Mayer-Vietoris permet de la même manière de calculer moult groupes de diverses variétés et de former ainsi de proche en proche une base de donnnées de ces groupes, afin d'étudier des variétés encore plus complexes dont les variétés précédentes seront les morceaux. Avant de conclure, donnons un exemple de toute la puissance de cette théorie. Lors de la démonstration du théorème de Brouwer, on devait montrer le résultat suivant :

On montre qu'il n'existe pas de fonction lisse $f : D^n \to S^{n-1}$ qui se comporte comme l'identité sur S^{n-1}

ce pour quoi on utilisait une classification des 1-variétés lisses à bord. Désormais, on peut s'en passer. En notant i l'inclusion de S^{n-1} dans D^n on a donc en regardant les pullback (ou les morphismes qu'ils induisent) $f \circ i = Id_{S^{n-1}}$. Donc $i^{\#} \circ f^{\#} = Id_{H^{n-1}(S^{n-1})}$ donc $f^{\#}$ est injectif, or $f^{\#} : H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \to H^{n-1}(D^n) \cong \{0\}$, ce qui rend l'injectivité impossible.

Remarque : un tel résultat n'aurait pas pu être vu par la simple notion de groupe fondamental en topologie algébrique de base, en effet dans cette théorie, les deux groupes en question auraient été triviaux (les deux variétés sont simplement connexes). Voilà donc une belle démonstration de la puissance de la cohomologie : en une ligne, on montre un résultat qui a nécéssité au début de l'exposé de passer sur toute la classification des 1-variétés à bord.

5 Conclusion

En conclusion on aura donc vu une généralisation pratique du calcul différentiel aux variétés lisses, pour pouvoir définir le concept d'invariant de degré de Brouwer qui a lui seul aura permis de prouver assez simplement des résultats très importants que sont le théorème de Brouwer ou le théorème de la boule chevelue. On aura aussi fait un peu d'algèbre, prenant le théorème d'Hopf-Poincaré et les champs de vecteurs comme tremplin pour arriver à définir la notion de cohomologie de De Rham et en constater un peu la puissance.
Sur le plan personnel, ce stage m'aura apporté plusieurs choses. Premièrement, il m'a permis de renouer avec le calcul différentiel qui était un domaine que je n'appréciais pas spécialement. J'ai pu en découvrir à la fois une formalisation et une généralisation, que ce soit au niveau basique que sont les concepts de valeurs régulières, ou la découverte du théorème de Sard, jusqu'à la notion de forme différentielle, sur laquelle j'ai enfin pu plaquer des définitions précises. Par là même, j'ai pu aussi faire un peu d'algèbre, travailler sur la construction de l'algèbre graduée des tenseurs, et finir par accomplir mes volontés premières qu'étaient de faire de la cohomologie. J'ai pu constater une once de l'efficacité et la puissance de cette technique, et cela a renforcé ma volonté de vouloir approfondir mes connaissances en la matière (j'aimerais travailler prochainement sur l'homologie singulière et aussi le théorème de De Rham), et qui sait, peut-être plus tard me spécialiser en topologie algébrique.

Pour finir, je tiens à remercier Gaël Collinet et Pierre Guillot pour leur accueil, leurs conseils, le temps qu'ils m'ont consacré et leur écoute. J'ai pu rester quelques jours avec mes encadrants, et au dela de mon sujet de stage, pu voir un peu comment s'organisait leur travail de maîtres de conférences. Je tiens aussi à remercier l'IRMA et l'UFR de mathématiques de Strasbourg en général, d'une part pour la qualité de leur accueil, où j'ai pu travailler dans des locaux agréables et flambants neuf, et aussi pour leur dynamisme mathématique, m'ayant permis d'assister à plusieurs conférences de géométrie, dont une donnée par le médaillé Fields Andrei Okounkov, et de discuter avec plusieurs personnes intéressantes.

Références

[1] John Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

[2] Victor Guillemin, Allan Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.

[3] John M Lee, *An introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, 2002.

[4] Gábor Tóth, *Glimpses of algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2002.