Université de Rennes 1
Master 1 Mathématiques

TD 1. Introduction aux équations aux dérivées partielles

Exercice 1. On considère les équations aux dérivées partielles suivantes, où $k(x)$ est une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]^2$:

1. $-\mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x)) = f(x)$ sur $\Omega =]0,1[^2$,
2. $\partial_t u(x,t) - \mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x,t)) = f(x,t)$ sur $\Omega =]0,1[^2 \times [0,T]$,
3. $\partial^2_{tt} u(x,t) - \mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x,t)) = f(x,t)$ sur $\Omega =]0,1[^2 \times [0,T]$,

avec $T > 0$ donné et f une fonction continue donnée.
Mettre ces EDP sous la forme canonique

$$\mathrm{div}(A\nabla u) + b.\nabla u + cu = f \tag{1}$$

où A est une matrice symétrique. Dire si ces équations sont elliptique, parabolique ou hyperbolique.

Exercice 2. 1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (x-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Considérant la donnée initiale $X(s) = x$ où s et x sont deux réels, résoudre l'EDO suivante :

$$X'(t) = X(t) - 1,$$

dont on notera la solution $X(t;(s,x))$ (préciser son domaine d'existence).

(b) vérifier que u est constante le long des courbes $\{(t, X(t;(s,x))), t \in \mathbb{R}\}$ pour tout $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En déduire la forme explicite de la solution $u(t,x)$ du problème de Cauchy (2).

(c) Vérifier que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 u(t,x)\,dx = 2.$$

En quoi ce résultat était-il prévisible ?

2. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre explicitement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (t-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

3. Soit $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Résoudre explicitement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ v(0,x,y) = v_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4}$$

Déterminer les solutions stationnaires du modèle précédent, i.e. les fonctions $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$-y\frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{5}$$

Exercice 3. Sur une demi-droite en espace, on considère une équation de transport à vitesse constante $a > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0,\ x > 0, \tag{6}$$

assortie de deux données u_0 et u_b correspondant chacune à une partie du bord du domaine Ω :

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x), & x \geqslant 0, \\ u(t,0) = u_b(t), & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

1. Démontrer que l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ n'est possible que si les données u_0 et u_b sont elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et vérifient des relations de compatibilité que l'on identifiera.
2. Que se passe-t-il dans le cas où $a < 0$?