TRANSFORMATION DE FOURIER, APPLICATIONS, ET UTILISATION DANS LES LEÇONS D'ANALYSE

LÉO MORIN

Ce cours a pour but de présenter la transformation de Fourier et ses applications en analyse, dans le cadre du programme de l'agrégation. Il peut servir de plan pour la leçon 250 "Transformation de Fourier. Applications.", mais il propose également de nombreux résultats pouvant servir d'exemples ou d'applications intéressantes dans d'autres leçons.

Table des matières

Dans la leçon sur la Transformation de Fourier, il n'est pas nécessaire de rappeler toutes les définitions autour de l'espace de Schwartz et des distributions tempérées. Les propriétés relatives à la transformée elle-même sont suffisantes. Il est conseillé de mettre des applications aux EDP. Les parties les plus importantes demeurent celles sur la transformation de Fourier L^1 et L^2. L'utilisation de la fonction caractéristique en probabilités est également une application importante de la transformée de Fourier, qui mérite une partie dans la leçon.

1. Transformation de Fourier de fonctions $\mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$

Définition 1 (Transformation de Fourier)**.** *Si $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}f$) par :*

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^d, \quad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{R^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}x,$$

où $\langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$.

Remarque. Il faut faire attention aux conventions : Certains définissent la transformée de Fourier avec $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en facteur, ou par la formule $\int f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x$. Cela change seulement les constantes en jeu dans tout ce qui suit.

Exemple 1. (Calculs d'intégrales par primitive) Si $d = 1$ et

$$f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

alors

$$\hat{f}(\xi) = 2e^{-i\frac{a+b}{2}\xi}\frac{\sin\left((a-b)\xi\right)}{\xi}.$$

Exemple 2. (Calculs d'intégrales gaussiennes) Si $t > 0$ et

$$f(x) = e^{-t\|x\|^2},$$

alors

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4t}.$$

Exemple 3. (Calculs d'intégrales par intégration complexe) Si $d = 1$ et

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

alors

$$\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

Exemple 4 : transformation de Fourier du translaté. Soit $h \in \mathbf{R}^d$, et $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$. On définit le translaté $\tau_h f$ par $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Alors

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-i\langle h,\xi\rangle}\hat{f}(\xi).$$

Théorème 1.

$$\mathcal{F} : \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^\infty(\mathbf{R}^d),$$

est une application linéaire continue, et pour $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$:

$$(i) \quad \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1,$$

$$(ii) \quad \hat{f} \text{ est continue,}$$

$$(iii) \quad \lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Preuve. (Application du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, exemple d'application linéaire continue, application de la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ dans $\mathsf{L}^1(\mathbf{R})$.)
(i) vient de l'inégalité triangulaire, (ii) découle du théorème de continuité des intégrales à paramètre. (iii) s'appelle le Lemme de Riemann-Lebesgue. Démontrons-le dans le cas $d = 1$. Si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, on a par intégration par partie :

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{|f'(x)|}{|\xi|}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{|\xi|}\|f'\|_1 \to_{\xi\to 0} 0.$$

Si $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R})$ quelconque, pour $\varepsilon > 0$ fixé il existe $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$. Alors :

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f-g\|_1 + |\hat{g}(\xi)|,$$

donc $|\hat{f}(\xi)| < 2\varepsilon$ pour $|\xi|$ assez grand.

Théorème 2. *Soient f, $g \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Alors pour $\xi \in \mathbf{R}^d$:*

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Preuve. (Application du produit de convolution de deux fonctions L^1)
Comme f et g sont dans $\mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$, $f \star g \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$. De plus :

$$\begin{aligned}\widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\ e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle} \int_{\mathbf{R}^d} g(x-y)e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Théorème 3. *Soit $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$.*

(i) Si f est dérivable par rapport à x_j et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi)$.

(ii) Si $x_j f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $\hat{f}$ est dérivable par rapport à ξ_j et $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -\widehat{ix_j f}$.

Preuve. (i) $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ donc sa transformée de Fourier est définie et

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x.$$

Une intégration par partie donne (voir détails ci-après) :

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = -\int_{\mathbf{R}^d} f(x)(-i\xi_j)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x = i\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

(ii) est une application du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Justification de l'intégration par partie. Ici, on veut faire une intégration par partie sur tout $\mathbf{R}^d$, il faut faire attention. Détaillons dans le cas $d = 1$ pour alléger les notations. On peut faire, pour tout $R > 0$, une intégration par partie sur $[-R, R]$:

$$\int_{-R}^{R} f'(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{x=-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f(x)(-i\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\liminf_{R\to+\infty} \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{x=-R}^{R} = \liminf_{R\to+\infty} f(R)e^{-iR\xi} - f(-R)e^{iR\xi} = 0,$$

car f est dans $\mathsf{L}^1(\mathbf{R})$. De plus, les deux intégrales convergent car f et f' sont intégrables par hypothèse. Ainsi, en passant à la $\liminf$, on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}} f(x)(-i\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Remarque sur le théorème. Ce théorème illustre une propriété fondamentale de la transformation de Fourier : Elle échange régularité en x et décroissance en ξ. Ceci est très général. L'exercice suivant en est une autre manifestation.

Exercice. Montrer que la transformation de Fourier d'une fonction à support compact s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. On l'appelle transformée de Fourier-Laplace.

Théorème 4 (Formule d'inversion de Fourier)**.** *Soit* $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ *telle que* $\hat{f} \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$*. Alors :*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \quad \textit{pour presque tout } x.$$

Preuve. (Exemple de calcul d'intégrale, utilisation des approximations de l'unité) D'après le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi &= \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-t\|\xi\|^2}e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(y)e^{-t\|\xi\|^2}e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbf{R}^d} f(y)\hat{q}_t(y-x)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

avec $q_t(\xi) = e^{-t\|\xi\|^2}$. Or $\hat{q}_t$ a été calculé en exemple 2. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi &= (2\pi)^d\lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbf{R}^d} f(y)\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}\mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^d\lim_{t\to 0^+}\rho_t\star f(x).\end{aligned}$$

Or, $\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\|x\|^2/4t}$ est une approximation de l'unité, donc

$$\rho_t\star f \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d),$$

et donc :

$$\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d f(x) \quad \text{pour presque tout } x.$$

Corollaire 1. $\mathcal{F} : \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *est injective.*

2. Transformation de Fourier sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$

Théorème 5. *Si* $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)\cap\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$*, alors* $\hat{f} \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ *et*

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\hat{f}\|_2.$$

Preuve. On note $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f\star\tilde{f}$. g est continue en 0 et

$$g(0) = \int_{\mathbf{R}^d}|f(y)|^2\mathrm{d}y = \|f\|_2^2.$$

Notons $\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\|x\|^2/4t}$, qui est une approximation de l'unité. On a donc par continuité de g en 0 :

$$\lim_{t\to 0^+}\rho_t\star g(0) = g(0) = \|f\|^2.$$

D'autre part, $\widehat{\rho_t\star g}(\xi) = \widehat{\rho}_t(\xi)\widehat{g}(\xi) = e^{-t\|\xi\|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2$, donc d'après la formule d'inversion de Fourier (qui est valide sur $\mathbf{R}^d$ car $\rho_t\star g$ est continue) :

$$\rho_t\star g(0) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-t\|\xi\|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

On en déduit, en utilisant le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-d}\|\hat{f}\|^2 &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d}\liminf_{t\to 0^+} e^{-t\|\xi\|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\ &\le (2\pi)^{-d}\liminf_{t\to 0^+}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-t\|\xi\|^2}|\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\ &= \lim_{t\to 0^+}\rho_t\star g(0) = \|f\|^2,\end{aligned}$$

donc $\hat{f}\in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$. On en déduit par convergence dominée que l'inégalité du lemme de Fatou est en fait une égalité, ce qui démontre le théorème.

Théorème 6. $\mathcal{F} : \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)\cap\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)\to\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ *s'étend en une application linéaire continue*

$$\bar{\mathcal{F}} : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)\to\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d),$$

telle que, pour tout $f\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$*,*

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\bar{\mathcal{F}}f\|_2.$$

Autrement dit, $(2\pi)^{-d/2}\bar{\mathcal{F}}$ *est une isométrie de* $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Preuve. (Application du théorème de prolongement des applications uniformément continue) $\mathcal{F}$ est continue (pour la norme 2) sur $\mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)\cap\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ qui est dense dans $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$, et $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ est complet pour la norme 2, donc d'après le théorème de prolongement, $\mathcal{F}$ s'étend à $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Par densité, l'égalité du Théorème 5 se prolonge aussi à $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Exemple 1. Si $g(x)=\frac{\sin x}{x}$, que vaut $\widehat{g}$?

Exemple 2. Si $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$, que vaut $\widehat{g}$?

3. Espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$

3.1. Définition de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Définition 2. *L'espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *est l'ensemble des fonctions* $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *telles que*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^d,\quad x^\alpha\partial^\beta u \textit{ est bornée.}$$

Remarque. Ainsi, une fonction $u\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ vérifie

$$|\partial^\beta u|\le\frac{C}{1+|x|^n},\quad \text{pour tout } x\in\mathbf{R}^d, n\in\mathbf{N},\beta\in\mathbf{N}^d.$$

C'est pourquoi on dit que ces fonctions sont à décroissance rapide, (ainsi que leurs dérivées).

Exemple. $u(x)=e^{-|x|^2}\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Cette espace possède une notion de convergence naturelle.

Définition 3. *On dit qu'une suite* (u_n) *de* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *converge vers* u *dans* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *si :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^d, \quad \lim_{n\to+\infty} \|x^\alpha \partial^\beta (u_n - u)\|_\infty = 0.$$

L'intérêt principal de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est son rapport avec la transformation de Fourier. L'idée que $\mathcal{F}$ échange régularité en x et décroissance en ξ donne l'intuition du théorème suivant.

Théorème 7. *La transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$*. Autrement dit :*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$$

est une bijection bicontinue.

Preuve. Tout d'abord, si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, alors $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ d'après le Théorème 3. En effet :

$$\|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{u}\|_\infty = \|\widehat{\partial^\alpha (x^\beta u)}\|_\infty \leq \|\partial^\alpha (x^\beta u)\|_1 \leq C \|(1 + |x|^{d+1}) \partial^\alpha (x^\beta u)\|_\infty < +\infty.$$

La continuité découle également de ces inégalités. De même, l'inverse de $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}^{-1} u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}\xi,$$

vérifie le même type d'inégalités, ce qui prouve la bijectivité et la bicontinuité.

3.2. Opérations sur les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Dans cette partie, on liste quelques opérations importantes définies sur l'espace de Schwartz. La première est la dérivation.

Proposition 1. *Soit* $\alpha \in \mathbf{N}^d$*. La dérivation d'ordre* α*,*

$$\partial^\alpha : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d),$$

est continue.

Si on multiplie e^{-x^2} par n'importe quel polynôme, on obtient toujours une fonction $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Cela vient du fait qu'une croissance polynômiale est trop lente pour compenser la décroissance rapide des fonctions $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Nous allons généraliser cette idée.

Définition 4. *Une fonction* $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *est à croissance lente si, pour tout* $\alpha \in \mathbf{N}^d$*, il existe* $n > 0$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad |\partial^\alpha g(x)| \leq C(1 + |x|)^n.$$

Proposition 2. *Soit* g *une fonction* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *à croissance lente. L'application de multiplication :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \\ u & \mapsto & gu \end{array}$$

est bien définie et continue.

Preuve. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, et la croissance lente de g, on obtient des estimations de la forme :

$$\begin{aligned}|\partial^\beta(gu)(x)| &\leq \sum_\gamma C_\gamma|\partial^{\beta-\gamma}u(x)\partial^\gamma g(x)|\\ &\leq \sum_\gamma C_\gamma(1+|x|)^{n_\gamma}|\partial^{\beta-\gamma}u(x)|,\end{aligned}$$

et donc

$$\|x^\alpha\partial^\beta(gu)\|_\infty \leq \sum_\gamma C_\gamma\|x^{\alpha+n_\gamma}\partial^{\beta-\gamma}u\|_\infty,$$

ce qui prouve que $gu \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et que $u \mapsto gu$ est continue.

Enfin, la troisième opération que nous considérons est le produit de convolution.

Proposition 3. *Soit $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. L'application de convolution*

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\\ u & \mapsto & u\star v\end{array}$$

est continue.

Preuve. En utilisant :

$$u\star v = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}\widehat{v}),$$

la proposition découle de la continuité de $\mathcal{F}$, de $\mathcal{F}^{-1}$ et de la multiplication.

Remarque. On aurait pu démontrer la continuité de la convolution "à la main", sans utiliser la transformation de Fourier, mais seulement avec la définition.

4. Distributions Tempérées : $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$

4.1. Définition de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

L'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est le *dual topologique* de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ (voir la définition ci-dessous). Contrairement à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, qui est petit, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est un espace très large, qui contient notamment toutes les fonctions à croissance polynômiale, et bien plus encore. La dualité va permettre d'étendre de nombreuses opérations, dont la transformation de Fourier, à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Définition 5. *$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on note $\langle T, u\rangle$ l'image de u par T. Les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ sont appelés distributions tempérées.*

Exemple 1. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, f définit une distribution tempérée T_f par la formule :

$$\langle T_f, u\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

L'identification $f \mapsto T_f$ permet de voir $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ comme un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Ainsi, on note parfois $\langle f, u\rangle$ au lieu de $\langle T_f, u\rangle$.
Plus généralement, on dit qu'une fonction $f \in \mathsf{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ est tempérée si la formule

$$\langle T_f, u\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)u(x)\mathrm{d}x$$

définit une distribution tempérée.

Exemple 2. La distribution de Dirac en $a \in \mathbf{R}^d$, notée δ_a, est définie par :

$$\langle \delta_a, u \rangle = u(a).$$

Exemple 3. La fonction $\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution tempérée comme dans l'exemple 1, mais on définit la distribution *valeur principale de* $\frac{1}{x}$, notée $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$, par :

$$\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), u \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{u(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Exemple 4. Le *peigne de Dirac* est la distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ définie par :

$$\langle T, u \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} u(n).$$

Il y a sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ une notion naturelle de convergence.

Définition 6. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ si :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \quad \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, u \rangle = \langle T, u \rangle.$$

Exemple 1. Si $f_n \to f$ dans $\mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $T_{f_n} \to T_f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Exemple 2. Pour $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x| \geq \varepsilon}}{x}$$

définie une distribution tempérée T_{f_ε}, et on a la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} T_{f_\varepsilon} = vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.2. **Opérations sur les distributions tempérées.**

Les opérations de dérivation, de multiplication, et de convolution, sont définies sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. On veut les étendre à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Si $f, u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\partial_j f$ est une fonction $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et :

$$\langle \partial_j f, u \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \partial_j f(x) u(x) \mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}^d} f(x) \partial_j u(x) \mathrm{d}x = -\langle f, \partial_j u \rangle.$$

Cette formule permet de définir la dérivation d'une distribution tempérée.

Définition 7. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbf{N}^d$, on définit $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par :*

$$\langle \partial^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha u \rangle.$$

Cette formule définit bien une forme linéaire continue car $u \mapsto \partial^\alpha u$ est continue pour la convergence de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Exemple 1. $\langle \partial^\alpha \delta_a, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u(a)$.

Exemple 2. La fonction $H(x) = \mathbf{1}_{x>0}$ définie une distribution tempérée, et $H' = \delta_0$.

De la même manière, si g est $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente et $f, u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, alors $gf \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et :

$$\langle gf, u\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} g(x)f(x)u(x)\mathrm{d}x = \langle f, gu\rangle.$$

On peut ainsi définir gT pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Définition 8. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty$ à croissance lente, on définit $gT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par :*

$$\langle gT, u\rangle = \langle T, gu\rangle.$$

Cette formule définit bien une forme linéaire continue car $u \mapsto gu$ est continue pour la convergence de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Enfin, si $f, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $f \star v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et :

$$f \star v(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(y)v(x-y)\mathrm{d}y = \langle f, v(x - .)\rangle,$$

d'où la définition de $T \star v$:

Définition 9. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on définit la fonction $v \star T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ par :*

$$v \star T(x) = \langle T, v(x - .)\rangle.$$

Nous présentons maintenant quelques propriétés du produit de convolution.

Proposition 4. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, alors*

$$\partial_j(v \star T) = (\partial_j v) \star T = v \star (\partial_j T).$$

Proposition 5. *Si $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,*

$$v \star \delta_0 = v.$$

4.3. **Transformation de Fourier d'une distribution tempérée.**

De la même manière que dans la partie précédente, la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ peut s'étendre à tout $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. En effet, si $f, u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on peut utiliser le Théorème 5 pour montrer que

$$\langle T_{\widehat{f}}, u\rangle = \langle T_f, \widehat{u}\rangle.$$

Cette formule permet de définir la transformation de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 10. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, on définit $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par :*

$$\langle \mathcal{F}T, u\rangle = \langle T, \mathcal{F}u\rangle.$$

Cette formule définit bien une distribution tempérée car $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est continue. On déduit directement des définitions le théorème suivant.

Théorème 8. *La transformation de Fourier :*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$$

est bijective bicontinue.

Remarque. On a dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ la formule d'inversion $\langle \mathcal{F}^{-1}T, u\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}u\rangle$.

Théorème 9. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, alors :*

$$\mathcal{F}(\partial_j T) = i\xi_j \mathcal{F}T,$$
$$\mathcal{F}(x_j T) = i\partial_j(\mathcal{F}T),$$
$$\mathcal{F}(v \star T) = \mathcal{F}(v)\mathcal{F}(T).$$

Exemple. Si $f = 1$, $\mathcal{F}f = (2\pi)\delta_0$.

4.4. **Formule sommatoire de Poisson.**

Théorème 10. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Alors :*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(2k\pi)e^{2ik\pi x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

Remarque. Avec des changements d'échelle, on montre que si $a > 0$ et $\omega = 2\pi/a$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+na) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(k\omega)e^{ik\omega x}.$$

Ainsi, si l'on pose

$$T_\omega = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{k\omega},$$

on a :

$$\widehat{T_\omega} = aT_a.$$

4.5. **Application aux EDP.**

Application 1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Le problème de Cauchy :*

$$\partial_t u = \Delta u,$$
$$u(t=0) = f,$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)) \cap \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))$, et cette solution vérifie $u_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ pour tout $t > 0$.

Remarque. Ce théorème illustre une propriété fondamentale de l'équation de la chaleur : cette équation est très régularisante. En $t = 0$, u_0 peut être très irrégulière, mais u_t est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $t > 0$.

Remarque sur les notations. Ici, on voit u comme une fonction continue $\mathbf{R}_+ \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, et on note u_t la distribution tempérée définie par u à l'instant $t \geq 0$. A $t > 0$ fixé, la distribution $\partial_t u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ est définie par :

$$\partial_t u = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u_{t+h} - u_h),$$

où la limite est prise dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)) \cap \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))$ solution. Pour tout $t > 0$, on peut appliquer la transformation de Fourier à l'équation $\partial_t u = \Delta u$. Ainsi,

$$\widehat{\partial_t u} = -|\xi|^2\widehat{u}.$$

De plus la continuité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ implique que

$$\widehat{\partial_t u} = \partial_t \widehat{u}.$$

On obtient le problème de Cauchy sur $\widehat{u}$:

$$\partial_t \widehat{u} = -|\xi|^2 \widehat{u},$$
$$\widehat{u}_0 = \widehat{f}.$$

On vérifie que :

$$\partial_t \left(e^{t|\xi|^2} \widehat{u} \right) = |\xi|^2 e^{t|\xi|^2} \widehat{u} + e^{t|\xi|^2} \partial_t \widehat{u} = 0,$$

et donc que :

$$e^{t|\xi|^2} \widehat{u} = \widehat{f}.$$

Ainsi

$$\widehat{u} = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f},$$

et en utilisant la transformation de Fourier inverse :

$$u_t = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) \star f = \left(\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \star f \quad \text{pour } t > 0.$$

Ceci prouve l'unicité. Réciproquement, on vérifie que cette formule définit une solution du problème de Cauchy, et les propriétés du produit de convolution impliquent que cette solution est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ dès que $t > 0$.

Définition 11. *On appelle solution fondamentale de l'équation de la chaleur la solution du problème :*

$$\partial_t u = \Delta u,$$
$$u(t = 0) = \delta_0,$$

au sens du théorème précédent. Pour $t > 0$, cette solution est la distribution associée à la fonction

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Remarque. En utilisant $f \star \delta_0 = f$, la solution fondamentale permet d'obtenir toutes les autres solutions (avec conditions initiales différentes) par convolution. En particulier, la solution fondamentale donne la régularité de toute autre solution.

Définition 12. *On appelle solution fondamentale du Laplacien toute distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telle que*

$$\Delta u = \delta_0.$$

Exemple. En dimension $d = 2$, $u(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$ est solution fondamentale du Laplacien.

Exemple. En dimension $d \geq 3$, $u(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ est solution fondamentale du Laplacien.

Application 2. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et u est la solution fondamentale du Laplacien donnée ci-dessus, alors $v = u \star f$ est solution de l'équation de Poisson*

$$\Delta v = f.$$

Références

[1] J. Faraut, *Calcul intégral,* EDP Sciences.

[2] L.C.Evans, *Partial Differential Equations.*

[3] F. Lineares, G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations,* Springer.

[4] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations 1 : Basic Theory,* Springer.