TRANSFORMATION DE FOURIER : EXERCICES

1. Transformation de Fourier de fonctions

Exercice 1. *Calculer les transformées de Fourier des fonctions* $\mathsf{L}^1(\mathbf{R})$ *suivantes.*
i) Pour $a < b$, $f(x) = \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$
ii) Pour $t > 0$, $f(x) = e^{-tx^2}$
iii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exercice 2. *Quels sont les* $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ *tels que* $f \star f = f$ *?*

Exercice 3. *Soit* $f \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R})$ *une fonction à support compact. Montrer que* $\widehat{f}$ *s'étend en une fonction holomorphe sur* $\mathbf{C}$.

Exercice 4. *Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.*
i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
ii) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

2. Distributions tempérées

Exercice 5. *Montrer que la formule*

$$\langle T, u \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} u(n)$$

définit bien une distribution tempérée.

Exercice 6. *Montrer que la fonction* $H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ *est tempérée et calculer ses dérivées (au sens des distributions).*

Exercice 7. *1) Montrer que la formule*

$$\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), u \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{u(x)}{x} \mathrm{d}x$$

définit bien une distribution tempérée $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
2) Montrer que $x \; vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
3) Montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.