Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Développements :

Ellipsoïde de John Loewner, Formes de Hankel.

Bibliographie :

Rombaldi, De Seguin Pazzis, Gourdon, Grifone, Rouvière, Escofier.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon. La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue, et les propriétés classiques des coniques doivent être données. On pourra présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentation et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Formes bilinéaire et formes quadratiques

Définition 1 (Romb p463). *Forme bilinéaire, forme bilinéaire symétrique.*

Exemple 2 (Romb p463). $(x,y) \mapsto l_1(x)l_2(x)$ *est bilinéaire, de même avec la somme.*

Définition 3 (Romb p466). *Forme quadratique.*

Exemple 4 (Seguin p31). $Tr(AA^t)$*, le déterminant en dimension* 2*,* $x \mapsto l_1(x)l_2(x)$.

Proposition 5 (Romb p466). Q *forme un* K*-ev.*

Proposition 6 (Romb p469). $q(\lambda x) = \lambda^2 x$.

Remarque 7 (Romb p466). *Pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Exemple.*

Proposition 8 (Romb p466). *Forme polaire.*

Proposition 9 (Romb p467). *Formules de polarisation.*

Proposition 10 (Romb p467). Q *est de dimension* $n(n+1)/2$.

Exemple 11. *Exemple de forme quadratique.* $q_1(x,y) = 3x^2 + 6xy$

Proposition 12 (Escofier p631). *Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré* 2 *en les coordonnées, pour toute base.*

1.2 Représentation matricielle

Définition 13 (Romb p467). *Matrice d'une forme quadratique.*

Proposition 14 (Romb p467). $q(x) = tXAX$.

Exemple 15 (Gourdon p230). *Dans la base canonique,* $mat(q_1) = (3,3,3,0)$.

Proposition 16 (Seguin p32). *[Romb p467] Formule de changement de bases.*

Remarque 17 (Seguin p32). *Les matrices représentant une même forme quadratique constituent une classe d'équivalence dans* S_n.

1.3 Orthogonalité, noyau et rang

Définition 18 (Romb p468). *Orthogonal de* X *relativement à* ϕ.

Exemple 19. $ker(\phi) = E^\perp$, $\{0\}^\perp = E$.

Exemple 20 (Seguin p70). *Orthogonal de* S_n *dans* M_n *pour la trace.*

Proposition 21 (Romb p468). $X^\perp$ *est un sev de* E*,* $X \subset (X^\perp)^\perp$*, si* $X \subset Y$ *alors* $Y^\perp \subset X^\perp$.

Définition 22 (Romb p468). *Noyau de* q.

Définition 23 (Romb p468). *Vecteur isotrope.*

Remarque 24 (Seguin p52). *Deux formes quadratiques proportionnelles ont les mêmes vecteurs isotropes. Si* x *est un vecteur isotrope, l'ensemble des vecteurs de* $\vec{x}$ *sont isotropes. L'ensemble des vecteurs isotropes constitue donc un cône de sommet* 0*. D'où la définition suivante.*

Définition 25 (Seguin p52). *[Romb p468] Cône isotrope.*

Proposition 26 (Gourdon p230). *Le noyau est inclus dans le cône.*

Contre exemple 27 (Seguin p52). $(0,1,1,2)$ *a un cône non nul mais un noyau nul.*

Remarque 28. *Le cône est stable par multiplication scalaire mais pas par addition.*

Définition 29 (Romb p469). *Forme quadratique non dégénérée.*

Exemple 30 (Seguin p51). $Tr(A^2)$ *est non dégénérée.*

Proposition 31 (Romb p465). q *est non dégénérée si et seulement si sa matrice est inversible.*

Exemple 32 (Grifone p 303). *On peut être non dégénérée et avoir un cône isotrope non vide.*
$q(x) = x_1^2 - x_2^2 . C = \{x_1 = +- x_2\}$.
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 . C = \{x_3 = +- \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$.

Proposition 33 (Seguin p71). *Dimension de l'orthogonal dans le cas d'une forme bilinéaire non dégénérée.*

Proposition 34 (Gourdon p233). $dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E) + dim(F \cup Ker(q))$.
$F^{\perp\perp} = F + ker(q)$.

Proposition 35 (Romb p470). $dim(F) + dim(F^{\perp}) \geq dim(E)$, *l'égalité étant réalisée si* q *est non dégénérée. L'égalité* $E = F \oplus F^{\perp}$ *est réalisée si et seulement si la restriction de* q *à* F *est non dégénérée.*

Proposition 36 (Seguin p50). *Rang d'une forme quadratique.*

Proposition 37 (Romb p469). q *est non dégénérée si et seulement si son rang vaut* n.

Contre exemple 38. $q(x,y) = x^2 - y^2$, $F = (\vec{1,1}) = F^{\perp}$. *Donc* $E \neq F \oplus F^{\perp}$.

Exemple 39 (Seguin p51). *Exemple de calcul sur une forme quadratique.*

1.4 Formes quadratiques positives et définies

Définition 40 (Romb p477). *[Gourdon p234] Forme quadratique positive.*

Définition 41 (Romb p477). *[Gourdon p230] Forme quadratique définie.*

Proposition 42 (Gourdon p231). *Définie implique non dégénérée.* $ker(q) \subset C_q$.

Contre exemple 43 (Gourdon p231).

Exemple 44. $A \mapsto Tr(tAA)$ *est définie positive.* $A \mapsto Tr(A^2)$ *ni positive, ni négative,* $q(x,y,z) = x^2 + y^2$ *est positive,* $q(x,y) = x^2 - y^2$ *ni positive, ni négative.*

Exemple 45. q *est définie si* $C_q = \{0\}$.

Proposition 46 (Gourdon p235). *Inégalité de Cauchy Schwarz.*

Proposition 47 (Gourdon p235). *Une forme quadratique positive est non dégénérée si et seulement si elle est définie.*

Proposition 48 (Gourdon p235). *Minkowski.*

Proposition 49 (Gourdon p235). *Si* q *est positive alors* $\sqrt{q}$ *est une norme.*

2 Réduction et classification des formes quadratiques

2.1 Réduction en forme diagonale : réduction de Gauss et théorème spectral

Définition 50 (Gourdon p231). *Bases q-orthogonales.*

Remarque 51 (Gourdon p231). *Dans une telle base, la matrice de* q *est diagonale.*

Exemple 52 (Seguin p88). *Pour la forme quadratique* $q(x) = \sum a_i x_i^2$, *la base canonique est orthogonale.*

Proposition 53 (Gourdon p231). *Existence de base q-orthogonale.*

Corollaire 54 (Seguin p231). *Toute forme quadratique est représentée par une matrice diagonale.*

Application 55 (Gourdon p231). *[Romb p476] Avec* A *symétrique.*

Théoreme 56 (Romb p471). *Réduction de Gauss.*

Remarque 57. *Cette décomposition s'obtient de façon effective, en éliminant des variables au fur et à mesure de la construction des* l_i *et en utilisant l'identité* $xy = (1/4)((x+y)^2 - (x-y)^2)$.

Exemple 58 (Romb p487). *Exemple avec une forme quadratique.*

Proposition 59 (Gridone p305). *Si* q *est une forme quadratique, il existe une base q-orthonormée si et seulement si* q *est définie positive, ie sa forme polaire est un produit scalaire.*

Application 60 (Romb p476). *Alors* $rg(q) = r$ *et* $ker(q) = \{x \in E, l_1(x) = 0, ..., l_r(x) = 0\}$.

Remarque 61. *Le théorème de pseudo-réduction simultanée (et son interprétation en termes de bases orthogonales). Si $K = \mathbb{R}$, si $q_1 \in Q(E)$ définie positive et $q_2 \in Q(E)$, il existe une base de E orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.*

Remarque 62. *Cette méthode est moins efficace que la méthode de Gauss mais permet d'avoir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant. Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée sans avoir à la dilater/contracter.*

Exemple 63. *Obtention d'une base orthogonale à la fois pour q et pour $< .,. >$.*

Application 64. *log concavité du déterminant.*

Proposition 65. *John Loewner.*

2.2 Signature d'une forme quadratique réelle

Proposition 66 (Seguin p100)**.** *[H2G2][Romb p478] Matrice équivalente pour q de rang r.*

Proposition 67 (Romb p479)**.** *Il existe un unique couple (s,t) tel que pour toute base q-orthogonale, le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ est égal à s et celui tel que $q(e_i) < 0$ soit égal à t. De plus, $s + t = rg(q)$.*

Définition 68 (Romb p479)**.** *Signature.*

Proposition 69 (Romb p480)**.** *Caractérisation de la signature en fonction des sev.*

Proposition 70 (Gourdon p324)**.** *[Romb p480][H2G2] Théorème d'inertie de Silvester.*
Classification sur $\mathbb{R}$ et définition de la signature.

Application 71 (Escofier p637)**.** *Il y a $(n+1)(n+2)/2$ classes d'équivalences de formes quadratiques réelles.*

Définition 72. *Deux formes quadratiques q_1, q_2 sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.*

Corollaire 73. *Deux formes quadratiques réelles sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.*

Exemple 74 (Grifone p310)**.** *Un exemple.*

Corollaire 75 (Grifone p310)**.** *Caractérisation de q définie positive, q est non dégénérée.*

Application 76. *Il y a $n+1$ classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^n$*

Proposition 77. *Formes de Hankel.*

Proposition 78 (Romb p481 + 700)**.** *q est définie positive si et seulement si ses mineurs principaux sont strictement positifs.*

Application 79 (Romb)**.** *S_n^{++} est ouvert.*

3 Application en géométrie différentielle : étude de la hessienne

Définition 80 (Rouvière p293)**.** *Différentielle seconde.*

Proposition 81. *Si f est C^2 alors d^2 définit une forme bilinéaire symétrique donc une fq.*

Proposition 82 (Rouvière p294)**.** *Forme bilinéaire de R^n de matrice...*

Théoreme 83 (Rouvière p294)**.** *Théorème de Schwarz.*

Remarque 84. *On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.*

Remarque 85. *Cette forme quadratique apparait naturellement dans la formule de Taylor à l'ordre 2.*

Proposition 86 (Rouvière p371)**.** *CNS d'extremum.*

Exemple 87. *$f(x) =< Ax, x > - < b, x >$ avec A symétrique définie positive. $D_x(f)(h) = 2 < Ax, h > - < b, h >=< (2Ax + b), h >$ s'annule en $x_0 = -1/2A^{-1}b$. Et $D^2_{x_0}(f)(h,h) =< Ah, h >$ est définie positive. Donc f admet un minimum global qui est atteint.*

Application 88. *Résolution de $Ax = b$.*

Proposition 89 (Rouvière)**.** *Lemme de Morse.*

Application 90 (Rouvière)**.** *Etude de la position d'un plan tangent par rapport à une surface.*

4 Coniques affines

Remarque 91 (Romb p497)**.** *On se place dans un plan affine euclidien P. On se donne un repère orthonormé de P, cela revient) travailler dans $\mathbb{R}^2$.*

4.1 Coniques et formes quadratiques

Définition 92 (Romb p524)**.** *On appelle conique du plan P tout ensemble C de points $M(x,y) \in P$ vérifiant une équation de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, (a,b,c) \neq (0,0,0)$.*

Remarque 93 (Romb p524)**.** *Posons $\phi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Alors $\phi = q + l + f$ où q est la forme quadratique non nulle définie par $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, l est la forme linéaire $l(x,y) = dx + ey$ et f est une constante.*

Exemple 94 (Romb p524)**.** *L'équation $xy = 0$ décrit une conique constituée par deux droites sécantes, d'équations $x = 0$et $y = 0$. L'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ décrit une conique constituée du cercle de centre O et de rayon 1.*

Définition 95 (Romb p525). *Centre d'une conique.*

Proposition 96 (Romb p525). *M_0 est un centre si et seulement si (x_0, y_0) est solution de $ax_0 + by_0 = -d/2$ et $bx_0 + cy_0 = -e/2$, soit en termes matriciels $A(x_0, y_0)^t = B$, où A est la matrice de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition 97 (Romb p525). *L'ensemble des centres d'une conique est soit vide, soit réduit à un point, soit une droite. Une conique est à centre si et seulement si q est non dégénérée.*

Remarque 98 (Romb p526). *Les centres sont les points singuliers de ϕ.*

Exemple 99 (Romb p527). *$y - x^2 = 0$ n'est pas à centre.*

Remarque 100 (Romb p527). *Si C est une conique à centre, en plaçant l'origine au centre, cette conique a une équation de la forme $q(X) = \alpha$ où q est une forme quadratique non dégénérée et α une constante.*

4.2 Réduction des coniques

Proposition 101 (Romb p527). *Il existe a_1, a_2 tels que $q(X) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ dans une certaine base.*

Proposition 102 (Romb p527). *Distinction des différents cas : ellipse, hyperbole, vide, $\{(0, 0)\}$.*

Exemple 103 (Romb p527). *$x^2 + y^2 + 4xy + 4(x + y) - 8 = 0$.*

Proposition 104 (Griffone p414). *Classification affine des coniques en fonction de Q et q. (Dans un grand tableau prenant la signature de Q, la forme de $C(q)$, et la conique résultant de cela).*

4.3 Définitions par foyer et directrice

Définition 105 (Romb p497). *Conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e. Axe focal.*

Proposition 106 (Romb p499). *Equation cartésienne dans (F, i, j).*

Proposition 107 (Romb p500). *L'axe focal est un axe de symétrie de la conique.*

Proposition 108 (Romb p507). *Si $e < 1$, la conique C admet pour équation dans un certain repère orthonormal $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R}^*$. C'est une ellipse, qui admet les axes du repère comme axes de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Elle admet en particulier un deuxième foyer F' et une deuxième directrice D'.*

Proposition 109 (Romb p514). *Caractérisation bifocale.*

Proposition 110 (Romb). *Paramétrisation de l'ellipse.*

Proposition 111. *Si $e > 1$, la conique C admet pour équation dans un certain repère orthonormal $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R}^*$. C'est une hyperbole, qui admet les axes du repère comme axes de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Elle admet en particulier un deuxième foyer F' et une deuxième directrice D'.*

Proposition 112 (Romb p516). *Caractérisation bifocale de l'hyperbole.*

Proposition 113. *Une hyperbole admet la paramétrisation $x(t) = ach(t), y(t) = bsh(t)$.*

Proposition 114. *Si $e = 1$, la conique C admet pour équation dans un certain repère orthonormal $y^2 = 2px$. C'est une parabole, qui admet l'axe Ox comme axe de symétrie.*

Proposition 115. *Une telle parabole admet la paramétrisation $x(t) = t^2/2p, y(t) = t$.*

Proposition 116. *Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique si et seulement si aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.*