# Leçon 202 : Exemples de parties denses et applications.

## Développements :

Densité des fonctions continues nulle part dérivables, Densité des polynômes orthogonaux.

## Bibliographie :

Gourdon, Pommellet, Oraux X-ENS, OA, H2G2, Hirsch Lacombe, Briane et Pages, Candelpergher (intégration), Brézis, Bernis, Faraut.

## Rapport du jury 2016 :

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et leurs applications, ou encore les critères de densité dans un espace de Hilbert. Le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein peut être abordé à des niveaux divers suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence voire son optimalité. Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de Weierstrass (le théorème de Stone Weierstrass) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces $L^p$ . Il est également possible de parler de l'équirépartition.

## Rapport de jury 2017 :

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et leurs applications (par exemple la densité des $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$)., ou encore les critères de densité dans un espace de Hilbert. Le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein peut être abordé à des niveaux divers (le choix du point de vue probabiliste exige d'en maîtriser tous les aspects) suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence voire son optimalité. Des exemples matriciels trouvent leur place dans cette leçon comme l'étude de l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans C (et même dans R pour les candidats voulant aller plus loin.) Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de Weierstrass (le théorème de Stone-Weierstrass) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces $L^p$. Il est également possible de parler de l'équirépartition.

## 1 Introduction

**Remarque 1.** *Cadre : $(E,d)$ désigne un espace métrique, $A$ une partie de $E$.*

**Définition 2** (Gourdon analyse p10)**.** *Partie dense.*

**Exemple 3.** *Un hyperplan est fermé ou dense.*

**Proposition 4** (Gourdon p19)**.** *Caractérisation séquentielle de la densité.*

**Proposition 5.** *Deux fonctions qui coincident sur une partie dense sont égales.*

**Définition 6.** *Partie séparable.*

## 2 Exemples de parties denses dans les espaces de dimension finie

### 2.1 Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Proposition 7** (Gourdon p10)**.** *Partie dense de $\mathbb{R}$.*

**Exemple 8** (Gourdon p10)**.** *[Pommelet p20] $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

**Application 9.** *Tout evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est séparable.*

**Exemple 10.** *$\mathbb{Q}(i)$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

**Proposition 11** (Pommellet p22)**.** *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est un morphisme de groupes et $f$ est continue alors $f=ax$.*

**Proposition 12** (Pommellet p23)**.** *Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.*

**Proposition 13** (Pom p23)**.** *[Gourdon analyse p197] Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.*

**Application 14** (Gourdon p197)**.** *$a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a/b\notin\mathbb{Q}$.*

**Application 15** (Pommellet p23)**.** *$\{e^{2i\pi n\theta}, n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $S^1$.*

**Application 16** (Pomm p24)**.** *$\{\sin(n), n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$. Valeurs d'adhérence de cette suite.*

**Proposition 17** (Pomm p21)**.** *[Gourdon p101] Densité des nombres 2-adiques.*

**Application 18** (Gourdon p101)**.** *Si $f$ est continue et $f((x+y)/2)\leq(1/2)(f(x)+f(y))$ alors $f$ est convexe.*

### 2.2 Dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$

**Proposition 19** (Gourdon algèbre p183). *$GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.*

**Application 20.** $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**Proposition 21** (OA p179). *Résultats de densité sur les matrices diagonalisables $T_n(K)$, $C_n(K)$, $D_n(K)$.*

*L'ensemble des matrices diagonalisables et l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sont denses dans l'ensemble des matrices trigonalisables.*

$\overline{C_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$ *et* $\overline{C_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

**Contre exemple 22** (Gourdon). *$D_n(\mathbb{R})$ pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$, prendre $R_{-\pi/2}$.*

**Application 23** (H2G2 p48). *[Gourdon p186] Théorème de Cayley Hamilton dans $\mathbb{C}$.*

**Application 24** (Romb p680). *$A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue.*

**Application 25** (OA p180). *La non-continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford.*

*L'application qui à une matrice trigonalisable associe sa partie diagonalisable de la décomposition de Dunford n'est pas continue.*

**Proposition 26** (H2G2). *Les matrices de rang r sont denses dans l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r. En particulier, les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices.*

# 3 Exemples de parties denses dans les espaces de fonctions

### 3.1 Dans l'ensemble des fonctions continues

**Proposition 27** (Gourdon p97). *Une fonction continue est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier. (Sert pour l'intégrale de Riemann).*

**Définition 28** (Hirsch Lacombe p28). *Partie séparante.*

**Théoreme 29** (Hirsch L p28). *Théorème de Stone Weierstrass, cas réel. Toute sous-algèbre de $C([a,b],\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C([a,b],\mathbb{R})$.*

**Application 30** (Hirsch L p28). *Ensemble des fonctions lipschitziennes.*

**Application 31.** *Théorème de Weierstrass. Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite de polynômes $(P_n)$ convergeant uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.*

**Remarque 32** (Hisch p29). *Il existe des procédés explicites. Polynomes de Bernstein et vitesse.*

**Application 33** (Hirsch). *$C([a,b],\mathbb{R})$ est séparable.*

**Contre exemple 34** (Gourdon). *Faux si ce n'est pas sur un segment.*

*Une limite uniforme de polynômes est un polynôme.*

**Théoreme 35** (Hirsch L p30). *Théorème de Stone Weierstrass, cas complexe.*

**Application 36** (Gourdon p286). *Théorème des moments.*

**Proposition 37.** *Théorème de Weierstrass trigonométrique.*

**Remarque 38.** *On peut les construire explicitement avec Fejer.*

### 3.2 Parties denses dans les espaces $L^p$

**Proposition 39** (Briane p70). *Lemme d'approximation avec les 3 cas.*

**Proposition 40** (Briane p170). *Pour $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p$. Puis fonctions en escalier à support compact.*

**Proposition 41** (Briane p171). *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans tous les $L^p$.*

**Application 42.** *L'opérateur de translation est continu dans tous les $L^p$.*

**Application 43** (Candel p274). *[OA p128] Les polynômes trigonométriques sont denses dans les $L^p$. On a une expression explicite avec Fejer. Donc l'injection de la transformée de Fourier pour les séries.*

**Proposition 44** (Briane p178). *L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty$.*

**Contre exemple 45** (Candel). *Faux dans $L^\infty$ car sinon toute fonction de $L^\infty$ serait continue, ce n'est pas le cas pour $1_[0,1/2]$, on peut utiliser de la densité pour le démontrer.*

**Proposition 46.** *Pour $X \subset \mathbb{R}$ et $1 \leq p < +\infty$, $C_c^0(X)$ et $C_c^\infty(X)$ sont denses dans $L^p(X)$ pour $||.||_p$.*

**Remarque 47.** *Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme $L^p$ , il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.*

**Application 48** (Briane p192). *Inégalité de Hardy.*

**Proposition 49** (Brézis). *[Briane p178] $L^p$ est séparable pour $p < +\infty$, et n'est pas séparable pour $p = +\infty$. (On approche avec des fonctions étagées à pentes rationnelles sur des subdivisions rationnelles pour avoir une suite dénombrable dense)*

**Exemple 50.** *Pour $f_a(x) = \chi_[0,a]$ , on a $||f_a - f_b||_\infty = 1 \forall a,b > 0$. On a ainsi un nombre non-dénombrable de boules ouvertes de rayon $1/2$ , ce qui empêche la séparabilité.*

**Lemme 51** (Gasquet p37). *[Candel p293] Lemme de Riemann Lebesgue.*

**Application 52** (Candel p271). *$L^1 \cap L^2$ est dense dans $L^2$.*

# 4 Parties denses et complétude

## 4.1 Prolongement de fonctions

**Remarque 53** (Pommelet p67). *Si pour tout forme linéaire continue $f$, $f(F) = \{0\}$, alors $F$ est dense dans $E$*

**Théoreme 54** (Pommellet p48). *Théorème de prolongement des applications uniformément continues.*

**Contre exemple 55.** *$id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ non prolongeable par continuité.*

**Application 56.** *Si $E'$ est un espace de Banach, $F$ un sous-espace vectoriel dense dans $E$, et $f : F \to E'$ une application linéaire continue, alors $f$ se prolonge en une application linéaire continue $f'$ sur $E$ tout entier, avec $||f'||_E = ||f||_F$ .*

**Application 57** (Pommellet p49). *[Albert p95] Construction de Riemann des fonctions réglées.*

*Soit $E$ un espace de Banach et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire et continue pour $||.||_\infty$ sur l'espace $E([a, b], E)$ des fonctions étagées de $[a, b] \to E$. On peut ainsi la prolonger à $\mathbb{R}([a, b], E) := E'([a, b], E)$ $||.||_\infty$. , l'espace des fonctions réglées de $[a, b] \to E$. On peut en particulier définir l'intégrale de Riemann de fonctions continues.*

**Application 58.** *$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier-Plancherel, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ par $P(f)(\xi) = 1/(\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$ se prolonge en un isomorphisme isométrique $P$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.*

**Application 59** (Bernis). *Intégrale de $\sin^2(\pi x)/(\pi^2 x^2)dx$.*

## 4.2 Lemme de Baire et conséquences

**Théoreme 60** (Gourdon p397). *Lemme de Baire.*

**Proposition 61.** *L'ensemble des fonctions continues nul part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues.*

**Proposition 62** (Gourdon p399). *Un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet.*

**Théoreme 63** (Gourdon p404). *Théorème de Banach Steinhaus.*

**Application 64** (Gourdon p405). *Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

## 4.3 Espaces de Hilbert

**Proposition 65** (OA p100). *Soit $H$ un espace de Hilbert. Soit $F$ un sev de $H$. $F$ est dense dans $H$ si et seulement si $F^\perp = 0$.*

**Définition 66** (OA p107). *Bases hilbertiennes.*

**Proposition 67** (OA p109). *Caractérisation des bases hilbertiennes.*

**Exemple 68** (OA p110). *$e_n$ dans $L^2$.*

**Proposition 69.** *Densité des polynômes orthogonaux.*

**Proposition 70** (Faraut). *Egalité de Parseval.*

**Application 71** (Faraut). *Calculs de sommes.*

**Proposition 72** (Hirsh L). *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne.*

**Corollaire 73.** *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$.*

**Application 74.** *Pour $E$ Hilbert séparable, décomposition d'un élément dans s une base hilbertienne (la suite des coeffs étant dans $l^2(\mathbb{N})$, donc convergence $l^2$ .)*