

L'origami, ou l'art de plier les Mathématiques

Marie TRIN

15 juin 2017

Introduction

Traditionnellement et étymologiquement l'origami est l'art de plier le papier, mais durant les dernières décennies et grâce à des physiciens ou mathématiciens origamistes cet art a gagné ses lettres de noblesse au sein de différents domaines scientifiques. En lui apportant une formalisation et une étude jusque là peu développée ils ont ainsi révélé des aspects encore inconnus de l'origami : des aspects scientifiques.

J'ai alors décidé de me fixer un domaine précis dans le cadre vaste qu'est l'origami dans le but d'en étudier les facettes mathématiques et de les transcrire informatiquement. J'exposerai donc le cadre de mon étude avant de mettre en avant les théorèmes, ainsi que leurs démonstrations, qui régissent l'origami dans ce domaine précis. Je présenterai ensuite les algorithmes que j'ai pu mettre en place dans le but d'appliquer les résultats de ces théorèmes.

Cadre de l'étude

Définitions et vocabulaire

La construction formelle de l'origami commence avec la détermination des sept axiomes de bases déterminant les plis réalisables à partir d'une feuille de papier [2]. D'autre part, on distinguera différents types de plis en fonction de leur position dans le modèle final : les plis formant une arête sont appelés plis montagnes, ceux formant un creux sont appelés plis vallées.

Lorsque l'on dispose d'un origami, on peut alors marquer les différents plis, montagne et vallée, utiles au modèle final, en dépliant ensuite le modèle on obtient une figure appelée canevas de plis (annexe C). Une dernière méthode d'étude de l'origami est celle qui consiste à étudier les différentes étapes menant au modèle final, ces différentes étapes constituent ce que l'on appelle un diagramme de plis.

Cadre de l'étude

Le modèle, le canevas et le diagramme constituent trois angles d'étude différents de l'origami, j'ai décidé de focaliser mon étude sur les canevas de plis. D'autre part, on s'imposera les contraintes suivantes : utilisation des sept axiomes de l'origami, utilisation d'une seule feuille de papier. On se limitera d'autre part à l'étude des origamis plans : des origamis pliables à plat.

De plus, pour un développement optimal des applications de l'origami, une connaissance des bases de ses constructions est nécessaire, c'est donc une étude concrète de l'origami qui permet des applications pratiques de ce dernier. Mon travail a donc consisté en l'étude des propriétés mathématiques des canevas de plis (on parlera des branches ou arêtes ainsi que des noeuds qui le composent) puis à leur application informatique.

Théorie mathématique

Théorèmes fondamentaux

L'origami est régi par quatre théorèmes fondamentaux [4], dans le cadre des canevas, on s'intéresse seulement à trois d'entre eux [5].

Le premier d'entre eux est le théorème de Maekawa, du nom de l'origamiste japonais Jun Maekawa, qui s'énonce de la manière suivante :

Soit un N noeud interne du canevas, si le canevas est pliable à plat, alors, en notant N_m le nombre de plis montagne ayant une origine en N et N_v le nombre de plis vallée, on a $N_m - N_v = \pm 2$

Le second théorème est le théorème de Maekawa, qui lui aussi porte le nom d'un origamiste japonais, et dont l'énoncé est le suivant :

Soit un N noeud interne du canevas, ce noeud est pliable à plat si et seulement si la somme alternée des angles formés par les plis issus de N est nulle, et globalement, si un canevas est pliable alors chacun de ses noeuds vérifie cette condition

Le dernier théorème que j'ai pu étudier est le théorème de bicolorabilité :

Soit un canevas de plis, s'il est pliable à plat alors on peut le colorer de deux couleurs sans que deux zones de la même couleur n'aient de frontières communes

Les deux premiers de ces théorèmes peuvent s'intuiter en considérant la découpe des sommets de l'origami [3]. Le dernier s'obtient par la démonstration du sens direct du théorème de Kawasaki mais lui aussi peut s'intuiter en observant le pliage final et en effectuant ainsi la coloration.

Formalisme mathématique

La démonstration de ces théorèmes, plus spécifiquement des deux derniers, s'appuie sur une représentation mathématique de l'origami [1]. Je me propose ici d'introduire ce formalisme (certain termes généraux étant réduit au cas spécifique qui nous intéresse)..

Σ_u : Ensemble des points où une application u n'est pas différentiable

Application rigide C^1 par morceaux : Soit $u : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que sa Jacobienne soit orthogonale en tout point où u est différentiable, on dit qu'elle est C^1 par morceaux si elle vérifie :

- Σ_u est un fermé de Ω ;
- u est de classe C^1 sur chaque composante connexe de $\Omega \setminus \Sigma_u$;
- pour tout compact K de Ω , l'ensemble des composantes connexes de $\Omega \setminus \Sigma_u$ qui intersecte K est fini .

n_Σ : Soit Σ un fermé de Ω , $x \in \Omega$, on note $n_\Sigma(x)$ le nombre de composantes connexes de $\Omega \setminus \Sigma$ qui ont x dans leur adhérence.

Polyèdre : On dit que $F \subset \mathbf{R}^n$ est une *face* de dimension k si :

- F est fermé, non vide, borné
- il existe un plan affine Π de dimension k , N demi-espaces affines ouverts H_1, \dots, H_N tels que $H = \Pi \cap H_1^- \cap H_N$

On dit que Π est le support de F . On dit que $\Sigma \subset \mathbf{R}^n$ est un polyèdre de dimension k s'il est l'union d'un nombre fini de faces de dimension k . On dit que c'est un polyèdre localement fini de dimension k si pour tout $x \in \Sigma$ il existe un voisinage U de x dans Ω tel que $\Sigma \cap \bar{U}$ soit un polyèdre.

Origami plan : Soit $u : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, on dit que u est un origami plan si et seulement si :

- u est une application rigide C^1 par morceaux ;
- il existe une suite d'applications $u_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3$ Lipschitzienne injectives qui convergent uniformément vers u : pour un plis donné, ce sont les étapes de repliement de la feuille.

On note que Σ_u est un polyèdre localement fini : les différentes faces sont les branches du canevas de plis.

Démonstrations

Théorème de Maekawa

Soit un N noeud interne du canevas, si le canevas est pliable à plat, alors, en notant N_m le nombre de plis montagne ayant une origine en N et N_v le nombre de plis vallée, on a $N_m - N_v = \pm 2$

Soit C un canevas de plis pliable à plat, considérons un de ses sommets N , plus particulièrement le pliage du disque unité centré sur N . Si l'on coupe la pointe de la figure obtenue on obtient, tant que le pliage reste plan, un polygone plan ie : ses angles valent 0 ou 2Π . Si l'on déploie légèrement la figure on observe plus concrètement ce polygone. Lorsqu'il est à plat, les plis montagne sont à l'origine des angles valant 0, les plis vallée de ceux vallant 2π . Soit $n = N_m + N_v$, n est le nombre de côtés du polygone. D'où,

$$\begin{aligned} N_m * 0 + N_v * 2\pi &= (n - 2)\pi \\ 2N_v &= 2 + N_m + N_v \\ N_m - N_v &= 2^1 \end{aligned}$$

Théorème de Kawasaki

Soit un canevas de plis pliable à plat, soit N un noeud, la somme alternée des angles formés par les plis issus de N est nulle

Soit P une face de dimension $n - 2$ (pour nous un point) d'un polyèdre Σ et $E_1 \dots E_N$ les faces de dimension $n - 1$ (droites) qui se rencontrent en P . Soient $\alpha_1 \dots \alpha_N$ les angles séparant ces faces, on dit que la condition de Kawasaki est satisfaite en P si et seulement si :

- N est pair ;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{N-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_N$.

Notons que, selon la remarque que j'ai pu faire lors de ma recherche algorithmique (partie suivante), la démonstration du théorème de Kawasaki nous mènera à démontrer le théorème de bicolorabilité.

Enoncé formel

Soit $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ (pour moi $n=2$) une application rigide C^1 par morceaux, soit P une face de dimension $n - 2$ de $\Sigma = \Sigma_u$. La condition de Kawasaki est satisfaite en P

Démonstration

- On trouve autour de P un nombre fini de composantes connexes de $\Omega \setminus \Sigma$ Notons les $A_1 \dots A_N$ avec A_i à la suite de A_{i+1} en tournant autour de P . Soit $L_1 \dots L_N$ les restrictions de u à $A_1 \dots A_N$, ce sont des applications affines. (Annexe B)
- D'après le Lemme (Annexe B) on a $L_{i+1} = S_i L_i$ où S_i est la symétrie par rapport à l'hyperplan $\bar{A}_i \cap \bar{A}_{i+1}$ (pour moi une droite). En tournant autour de P on a $L_1 = L_1 S_1 \dots S_N$ donc $Id = S_1 \dots S_N$ (1). Les S_1 ont un déterminant négatif et $det(Id)$ est positif donc $N \in 2\mathbf{N}^*$
- Notons α_i l'angle entre les hyperplans (droites) supports de S_i et S_{i+1} , on a $S_i S_{i+1} = R_i$ où R_i est la rotation d'angle $2\alpha_i$ par rapport à P . (1) donne donc $Id = R_1 R_3 \dots R_{N-1}$ et donc $2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \dots + 2\alpha_{N-1} = 2\Pi$ et donc $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{N-1} = \Pi$.
- En raisonnant de même sur $L_2 = L_2 S_2 \dots S_N S_1$ on a $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_N = \Pi$

1. le \pm venant du fait que la désignation pli montagne ou vallée vient du sens dans lequel on considère l'origami

Application informatique

Représentation et objectifs

Ayant maintenant connaissance des règles déterminantes concernant les canevas de plis, je me propose ici d'en automatiser les vérifications. Ayant un canevas pliable à plat on sait qu'il doit vérifier les trois théorèmes présentés précédemment, cependant, déterminer si un canevas quelconque est pliable ou non est un problème NP-complet. Les algorithmes présentés auront donc pour objectif d'évaluer un canevas de plis dans le but de détecter d'éventuelles erreurs permettant de dire qu'il n'est pas pliable mais ne permettront pas de donner une réponse à la question du caractère pliable d'un canevas.

Dans ce cadre-là, j'ai élaboré le cahier des charges suivant :

- on prend en entrée un canevas de plis ;
- pour chacun des noeuds, on vérifie la condition de Kawasaki ;
- pour la totalité du canevas on vérifie la condition de bicolorabilité.

J'ai pris le parti de ne pas utiliser la condition de Maekawa principalement pour la raison suivante : une des applications possible des algorithmes développés serait de vérifier les canevas générés par des algorithmes générateurs de canevas qui ne fournissent globalement pas les informations concernant les plis montagne et vallée [4].

Dans le but de mettre en place ces algorithmes, j'ai commencé par déterminer une représentation informatique pour un canevas, sachant que tout s'effectuera sous Python, on procédera de la manière suivante :

- la base du canevas est représentée par un graphe, matrice ou listes d'adjacence ;
- on numérote les points et on stocke leurs coordonnées dans une liste Python ;
- la taille du canevas est représentée par un couple (largeur, hauteur).

Nous verrons dans les parties suivantes les avantages respectifs de la représentation par le biais de matrices ou de listes.

Algorithmes correspondants

Théorème de bicolorabilité

Avant de mettre en place cet algorithme, on peut faire la remarque suivante :

La bicolorabilité équivaut à la multiplicité paire des noeuds

En effet, le canevas est bicolorable, si et seulement si, de chaque noeud interne² part un nombre pair de plis ou branches. Démonstration en annexe A.

Une fois cette remarque démontrée et prise en compte j'ai pu développer un algorithme testant la condition de bicolorabilité sur un canevas donné, je procède de la manière suivante :

- On boucle sur les noeuds ;
- Lorsque l'on rencontre un noeud interne, on teste sa parité ;
- On s'arrête dès que l'on a testé avec succès tous les noeuds ou lorsqu'on rencontre une erreur.

Concernant la complexité de cet algorithme, deux cas sont à distinguer : si l'on procède avec des listes d'adjacence, en considérant que la fonction `len` de Python fonctionne en temps constant, on a un coût en $O(m)$, en notant m le nombre de noeuds internes. Dans le cadre de matrice d'adjacence, il faut pour chaque noeud interne sommer sur la ligne de la matrice lui correspondant pour obtenir sa multiplicité. On a alors un coût en $O(nm)$ en notant n le nombre total de noeuds du canevas.

2. Noeud dont aucun des plis qui en est issu n'est sur un bord du canevas

Théorème de Kawasaki

Dans le cadre de cette vérification, je n'ai pas trouvé d'équivalence permettant de simplifier le problème, il faut donc vérifier la condition de Kawasaki pour chacun des noeuds internes du canevas. Pour cela, et pour chaque noeud, on procède de la manière suivante :

- On détermine les vecteurs directeurs de chaque pli partant de ce noeud ;
- On ordonne les plis en fonction de l'angle (entre $-\pi$ et π) qu'ils forment avec le vecteur $(1, 0)$;
- On fait la somme alternée des angles entre les vecteurs.

La complexité de cet algorithme est en $mn \log(n)$. Le facteur m vient du fait que l'on prend en compte tous les noeuds internes. Le terme en $n \log(n)$ provient du classement des plis grâce à un tri rapide. Ici, la représentation informatique n'influe pas sur la complexité.

Résultats et observations

Une fois ces algorithmes mis en place, je les ai testés sur différents canevas aux caractéristiques différentes :

- Une cocotte où les coordonnées des points sont simples et avec des angles remarquables 90 degrés ou 45 degrés ;
- Un bateau, toujours avec des coordonnées simples mais avec des valeurs d'angles moins spécifiques ;
- Un lapin avec des points aux coordonnées et angles non particuliers
- Un pliage aléatoire dans le but d'illustrer l'algorithme en dehors de pliages artistiques.

J'ai donc appliqué mes algorithmes à ces différents canevas, l'algorithme de bicolorabilité ne pose pas de problèmes mais on rencontre des problèmes au niveau de la somme des angles dans l'algorithme sur le théorème de Kawasaki. En effet, sur les deux derniers canevas présentés, la somme des angles n'est pas nulle pour certains noeuds. Cette erreur peut s'expliquer par deux arguments : l'épaisseur du papier entraîne un léger décalage dans les plis, mes outils de mesure (règle ou papier millimétré) ne donnent pas assez de précision pour avoir des angles précis, ceci s'ajoutant aux erreurs de calculs liées à la représentation des réels en machine.

Pour pallier ce problème, deux solutions sont possibles : réduire au maximum l'unité de mesure pour gagner en précision, c'est une solution envisageable dans le cas d'une utilisation en parallèle de générateurs de canevas, la seconde solution, que j'ai adoptée dans le cadre de mon utilisation de l'algorithme, est d'intégrer dans l'algorithme une marge d'erreur à l'appréciation de l'utilisateur.

Conclusion

J'ai donc ici pu développer les apports des mathématiques à l'origami : une formalisation et une compréhension profonde de son fonctionnement. Cependant le lien entre origami et sciences ne se limite pas à celà, en effet, les algorithmes générateurs de canevas que j'ai pu évoquer plus haut se basent sur un formalisme mathématique fondé sur l'étude des modes de remplissage du plan dans le but de créer des origamis de plus en plus complexes. D'autre part, il s'avère que l'origami est d'une grande aide dans de nombreux domaines scientifiques. Par exemple il permet, en mathématique, de résoudre les problèmes tels que la trisection de l'angle et la duplication du cube. En astrophysique, il est développé dans le but d'optimiser le pliage de surfaces de grande envergure. Ainsi, quel que soit le point de vue, les apports entre origami et mathématiques (et les sciences plus généralement) sont indéniables et apportent des solutions a des problèmes millénaires et fondamentaux.

Annexe A

Le sens indirect est clair.

Pour le sens direct on procède par récurrence.

Notons, $\forall n \in \mathbf{N}$ $P(n)$: Si un canevas possède n noeuds internes de multiplicité paire alors il est bicolorable.

Si $n=1$, en colorant alternativement les zones en tournant autour du noeud, on obtient la coloration.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons $\forall k \leq n$, $P(k)$, montrons $P(n+1)$.

Soit un graphe G à $n+1$ noeuds internes dont chacun est de multiplicité paire.

Numérotons les noeuds de 1 à $n+1$ tels que le $n+1$ -ème noeud ait au moins une branche dont l'extrémité se trouve sur un noeud externe¹ du graphe et forme un polygone² dont une arête au moins se trouve sur un bord.

Considérons alors le graphe H qui est le graphe G auquel on retire le dit polygone : le noeud $n+1$ devient un noeud externe de H (aussi potentiellement certains de ces voisins³) puisque deux de ces branches deviennent des bords du graphe⁴.

Le graphe H contient donc $k \leq n$ noeuds internes ayant tous un nombre pair de branches (puisque ce sont des noeuds internes de G), on peut appliquer $P(k)$ à H . H est donc bicoloré.

Par hypothèse le noeud $n+1$ possédait initialement $2p$ branches formant $2p$ polygones. Si l'on numérote les polygones dans le sens trigonométrique, en notant $(2p)$ celui qu'on a enlevé pour créer H , la coloration de H entraîne la coloration des polygones $(1) \dots (2p-1)$ ainsi que du reste de G : seul le polygone $(2p)$ reste à colorer. La coloration des polygones (1) à $(2p-1)$ étant correcte les polygones (1) et $(2p-1)$ sont de la même couleur d'où une coloration convenable pour le polygone $(2p)$.

Vérifions que cette coloration ne va pas à l'encontre de la coloration des autres noeuds de G qui ont une branche dans le polygone $(2p)$.

Notons $+$ la couleur du polygone $(2p)$ et $-$ celle des noeuds (1) et $(2p-1)$. Soit un noeud voisin du noeud $n+1$ ayant une branche dans le polygone $(2p)$. On note de même $(1)'$ à $(2m)'$ les polygones entourant ce noeud tels que polygone $(2p)$ soit le polygone $(2m)'$. Prenons le cas où $(2p-1) = (1)'$ (le second cas possible étant $(1) = (2k-1)'$).

La coloration de H étant correcte, la couleur de $(2k-1)'$ est celle de $(1)'$ qui est celle de $(2p-1)$ soit $-$. Les polygones touchant $(2p) = (2k)'$ au niveau du noeud considéré sont de couleur $-$, la coloration de $(2p)$ convient donc.

De proche en proche, la coloration convient pour tous les noeuds de G qui sont sommets du polygone $2p$.

Donc $P(n+1)$ et par application du principe de récurrence la propriété est vraie quelquesoit n .

1. Noeud se trouvant sur un bord du canevas

2. on parle ici des différents polygones formés par les différentes branches du graphe

3. Noeud ayant une branche ou un pli en commun avec le noeud considéré

4. Notons qu'on ne raisonne pas nécessairement sur un graphe carré

Annexe B

Théorèmes complémentaires

Théorème 1 (de Liouville)

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{R}^n , $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ dont la Jacobienne est orthogonale en tout point alors u est affine

Théorème 2

Soit $u : \Omega \subset \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ une Application rigide C^1 par morceaux alors u est affine sur toutes les composantes connexes de $\Omega \setminus \Sigma_u$

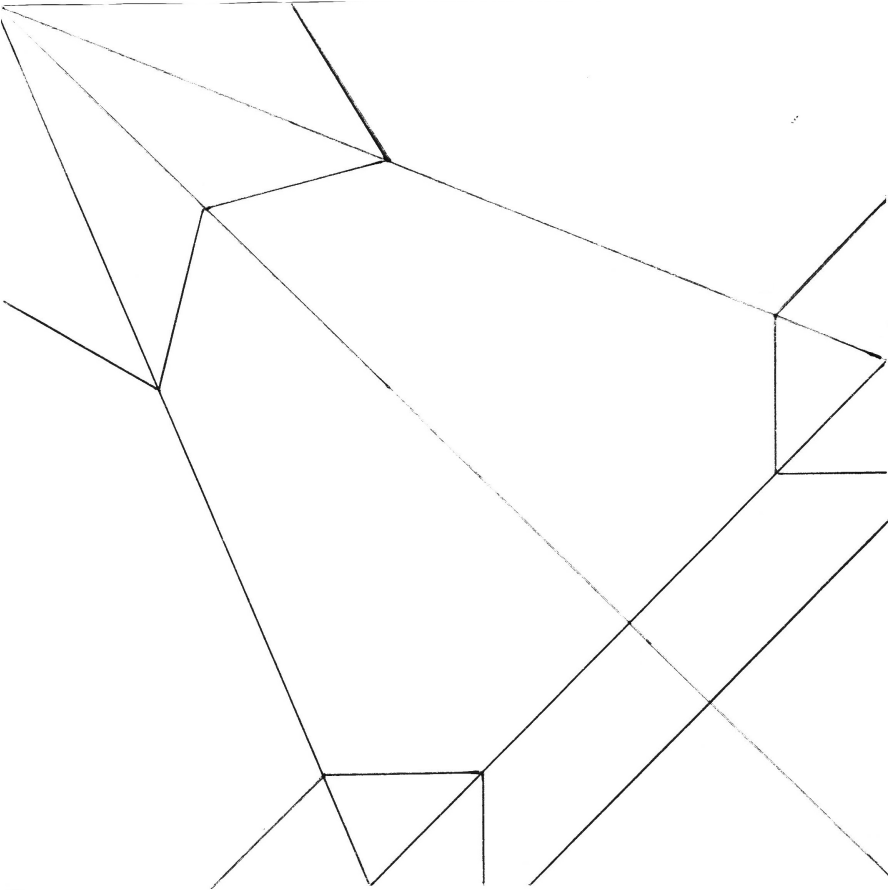
Lemme

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ et $u : \Omega \subset \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ Application rigide C^1 par morceaux (notons $\Sigma = \Sigma_u$, c'est un fermé de Ω). Soit $x \in \Omega$, si $n_\Sigma(x) = 2$, alors il existe un voisinage connexe U de x tel que $\Sigma \cap U = \Pi \cap U$ où Π est un espace de dimension $n - 1$ tel $x \in \Pi$. Notons U_1 et U_2 les deux composantes de $U \setminus \Pi$, les restrictions de u à U_1 et U_2 sont affines et :

$$L_1 = SL_2, L_2 = SL_1 \text{ où } S \text{ est la symétrie par rapport à } \Pi$$

Annexe C

Exemple de canevas



Canevas de plis d'un bateau

Bibliographie

- [1] DACOROGNA, MARCELLINI, and PAOLINI. Lipschitz-continuous local isometric immersions : rigid maps and origami. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 66,81, 2008.
- [2] J.-P. Delhayé. Les mathématiques de l'origami. *Pour la science*, pages 76,81, 2015.
- [3] T. Hull. Maekawa and kawasaki's theorems revisited and extended, 2010.
- [4] R. Lang. Robert j. lang origami. [http ://www.langorigami.com/](http://www.langorigami.com/).
- [5] T. Tokieda. Science à partir d'une feuille de papier, 2012.