THLR - Théorie des langages rationnels

Maxime Bridoux

Septembre 2020

Langages rationnels

Définition

On note $\mathrm{Rat}(\Sigma^*)$ la classe des langages rationnels sur Σ définie par induction:

- $\emptyset$ et $\{a\}$ pour $a \in \Sigma$ sont des langages rationnels;
- si L_1 et L_2 sont des langages rationnels, alors $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$, L_1^* sont des langages rationnels

Exemples de langages rationnels

- $\{\epsilon\} = \emptyset^*$
- $\Sigma = \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\}$
- $L_{2k} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists k \geq 0, |u| = 2k\} = (\Sigma\Sigma)^*$
- tous les langages finis

Expressions rationnelles

Définition

On note ER(Σ) l'ensemble des expressions rationnelles sur Σ défini par induction:

- $\emptyset$ et a pour $a \in \Sigma$ sont des expressions rationnelles;
- si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles, alors $(e_1 + e_2)$, $(e_1 e_2)$, (e_1^*) sont des expressions rationnelles

Exemples d'expressions rationnelles

- $a + b$
- $((a + b)^*)$
- $(((a + b)(a + b))^*)$
- $((a((a + b)^*))b)$

Interprétation

Définition

Le langage dénoté par une expression rationnelle e, noté L(e) est défini par induction:

- $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(a) = \{a\}$ pour $a \in \Sigma$
- $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$
- $L(e_1 e_2) = L(e_1)L(e_2)$
- $L(e^*) = (L(e))^*$

Exemple

$L((a((a+b)^*))b) = \{a\}(\{a\} \cup \{b\})^*\{b\}$

Simplification

Parenthèses

Au vu de l'associativité de certaines opérations, on se permet de retirer des parenthèses s'il n'y a pas d'ambiguïté

- $((a+b)+c) = a+b+c$
- $((ab)c) = abc$
- $ab^* \neq (ab)^*$

Priorité des opérateurs

Pour simplifier l'écriture, l'itération est prioritaire face à la concaténation qui est prioritaire face à l'union

Exemple de simplification

$((a((a+b)^*))b) = a(a+b)^*b$

Correspondance

Équivalence

L est rationnel si et seulement s'il existe une expression rationnelle e qui dénote L, i.e. telle que $L = L(e)$

Preuve

$\Rightarrow$ Induction sur la structure de langage rationnel

$\Leftarrow$ Induction sur la structure d'expression rationnelle

Intérêt

Montrer qu'un langage est rationnel en exhibant une expression rationnelle qui le dénote

Équivalence

Définition

Deux expressions rationnelles sont équivalentes si elles dénotent le même langage

Exemple d'équivalence

$e(f+g) \equiv ef+eg$

Réduction

L'équivalence de deux expressions rationnelles est calculable et se résout en temps polynomial