TD 1

Exercice 1 : Soient X et Y des ensembles.

a) Si $(A_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille de parties de X, montrer les relations

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} \subset \bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{i,j} = \bigcup_{f\in I^J}\bigcap_{j\in J} A_{f(j),j},$$

donner un exemple où l'inclusion est stricte.

b) De l'égalité, déduire qu'une intersection finie d'unions peut s'écrire comme union d'intersections finies.

c) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X, montrer les relations

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

d) Écrire $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j}$ comme une intersection d'unions. En déduire qu'une union finie d'intersections s'écrit comme une intersection d'unions finies.

e) Soient $f \in Y^X$, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Y. Montrer les relations

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \text{ et } f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \text{ et } f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

Donner un exemple d'inclusion stricte pour la deuxième relation. En déduire que le passage au complémentaire se comporte bien avec l'image réciproque $f^{-1}(B)$ mais pas toujours avec l'image $f(A)$.

f) Dans le cadre de la question précédente, donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'image ait les mêmes propriétés que l'image réciproque.

Exercice 2 : Déterminer les topologies sur un ensemble à deux ou trois éléments.

Exercice 3 : On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle $\mathcal{T}$. On considère un élément $\infty \notin \mathbb{R}$ et on définit l'ensemble $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On définit $\hat{\mathcal{T}}$ comme l'ensemble des parties U vérifiant :

1. Si U contient un point $x \in \mathbb{R}$, alors elle contient au moins un intervalle ouvert contenant x.
2. Si U contient ∞, alors elle contient au moins un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ et un de la forme $]a, +\infty[$.

Montrer que $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\mathcal{T}})$ est un espace topologique.

Exercice 4 : *Topologie codénombrable*
Soit X un ensemble infini muni de

$$\mathcal{T} = \{O \subset X, O^c \text{ est au plus dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Reconnaitre la topologie lorsque X est dénombrable.

Exercice 5 : *Topologie cofinie*
Soit X un ensemble infini muni de

$$\mathcal{T} = \{O \subset X, O^c \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

Exercice 6 : *Topologie engendrée par une famille de parties*
Soit X un ensemble non vide et Σ une famille de parties de X.

1. Montrer qu'il existe une unique topologie contenant Σ et incluse dans toute topologie contenant Σ. On note $\mathcal{T}$ cette topologie. Cette topologie s'appelle la topologie engendrée par Σ.

2. Quelle est la topologie engendrée par les singletons ?
3. On suppose que Σ est stable par intersection finie et que Σ recouvre X (i.e $X = \bigcup_{O \in \Sigma} O$). Montrer que $\mathcal{T}$ est constitutée des unions d'ensembles de Σ.
4. *(facultatif)* On suppose toujours que Σ recouvre X. Montrer que si l'on suppose l'hypothèse suivante vraie :

$$\forall S_1, S_2 \in \Sigma, \forall x \in S_1 \cap S_2, \exists S_3 \in \Sigma, \quad x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2, \quad \text{(H)}$$

alors le résultat de la question 2 reste vrai.

Exercice 7 : On munit $\mathbb{N}$ de la topologie $\mathcal{T}$ définie de la manière suivante : $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $n \in U$, les diviseurs de n appartiennent à U.

Montrer que $\mathcal{T}$ définit bien une topologie et que cette topologie est différente de la topologie discrète.

Définition. On dit qu'un espace topologie $(X, \mathcal{T})$ est séparé si pour tout $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$, il existe un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 8 : Pour chacun des exercices 2, 3, 4, 5 et 7, préciser si les topologies sont séparées.